GIULIANA LAURO

ELEMENTI INTRODUTTIVI ALLA

MECCANICA RAZIONALE

Dispense per gli studenti dei Corsi di Laurea Triennale in Ingegneria

ATENEAPOLI EDITORE

GIULIANA LAURO

ELEMENTI INTRODUTTIVI ALLA
MECCANICA RAZIONALE

Dispense per gli studenti dei corsi
di laurea triennale in Ingegneria

ATENEAPOLI EDITORE

ISBN: **978-88-97840-367**

copyright 2015
edizioni **Ateneapoli srl**
via Pietro Colletta, 12 (80139) Napoli
www.ateneapoli.it

BOOKSTORE
www.ateneapoli.it/libri

In copertina l'immagine tratta dal libro "I tre porcellini" di Peter Guarnaccia, Corraini Editore

A mio marito Claudio
ingegnoso informatico e geniale musicista,
per la sua paziente e incoraggiante collaborazione.

La musica è il piacere che la mente umana prova quando conta
senza essere conscia di contare
(Leibniz)

La musica è una matematica sonora.
La matematica, una musica silenziosa
(Edouard Herriot)

La musica è l'aritmetica dei suoni come
l'ottica è la geometria della luce
(Claude Debussy)

PREFAZIONE

Nel presente quaderno sono stati raccolti gli appunti didattici utilizzati nel corso di Elementi di Meccanica della Laurea Triennale in Ingegneria Aerospaziale - Meccanica presso la Scuola Politecnica e delle Scienze di Base della Seconda Università degli Studi di Napoli, dall'autrice negli anni 2011-2015. Per questo motivo gli argomenti della Meccanica Razionale trattati hanno carattere essenzialmente elementare e presentati in maniera user-friendly.

Il pochissimo tempo destinato dai nuovi ordinamenti all'insegnamento di questa materia, nel caso presente stiamo parlando di soli 6 CFU, non consente il necessario approfondimento e anzi obbliga all'esclusione di argomenti tradizionalmente ritenuti indispensabili. A beneficio degli studenti sono stati quindi scelti argomenti di carattere essenzialmente propedeutico alla Scienza delle Costruzioni e alla Meccanica Applicata quali la Statica e la Cinematica dei Corpi Rigidi, la Geometria delle Masse.

Il quaderno è corredato da ampi richiami a prerequisiti matematici necessari sia per colmare lacune di base, problematica questa molto diffusa oggi, che per fornire quelle nozioni, solitamente insegnate nei corsi di Analisi matematica II, inerenti le funzioni reali di due o tre variabili reali, compresa la teoria degli integrali doppi, ancora non appartenenti al bagaglio di conoscenze matematiche degli studenti a causa della collocazione del corso al I anno, così come previsto dal Manifesto degli Studi di quegli anni.

Il testo è corredato da numerosi esempi ed esercizi svolti, utili per una corretta comprensione della teoria.

La stesura del quaderno risente della scuola fisico-matematica fiorentina, in particolare degli insegnamenti del prof. Demore Quilghini, già professore ordinario di Fisica Matematica, con il quale l'autrice ha collaborato, negli anni 1988-1996, per attività didattiche relative alla cattedra di Meccanica Razionale della Laurea Quinquennale in Ingegneria Meccanica, presso la ex-Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Firenze. Con i suoi insegnamenti Egli ha trasmesso a varie generazioni di studenti e colleghi la curiosità, l'interesse e l'entusiasmo verso questa materia che rappresentava e, nonostante i limiti imposti dal nuovo ordinamento, tuttora rappresenta, per gli studenti di ingegneria, il primo approccio alla costruzione di modelli matematici per lo studio della realtà, attraverso il collegamento trasversale e multidisciplinare dei vari strumenti forniti dalla fisica e dalla matematica.

Un caloroso ringraziamento ai Tutor dott. Giuseppe Natalino e dott. ing. Imma Notaro per la loro preziosa attività didattica di sostegno al corso.

Giuliana Lauro

Aversa, settembre 2015

INDICE

1. RICHIAMI DI ALGEBRA VETTORIALE
1.1 Coordinate cartesiane nel piano 11
1.2 Trasformazione di Coordinate 15
1.3 I Vettori nel Piano 21
1.4 Rappresentazione cartesiana dei vettori 24
1.5 Vettori nello spazio R^3 28
1.6 Prodotto vettoriale 31
1.7 Momento di un vettore applicato rispetto ad un polo 37

2. SISTEMI DI VETTORI APPLICATI
2.1 Risultante e Momento Risultante. Asse Centrale 41
Esempio 2.1 - Calcolo momento risultante, invariante, equazione asse centrale 47
2.2 Invariante Scalare Nullo 50
2.3 Sistemi equivalenti. Sistemi equilibrati 51
2.4 Riepilogo sull'equivalenza 55
Esempio 2.6 - Verifica dell'equivalenza tra sistemi di vettori I 55
Esempio 2.7 - Verifica dell'equivalenza tra sistemi di vettori II 56
Esempio 2.8 - Calcolo equazione asse centrale e equivalenza 56
2.5 Centro di un sistema di vettori paralleli 57
Esempio 2.9 - Centro di Massa 59
2.6 Cenni sul Poligono Funicolare. Determinazione grafica dell'asse centrale per un sistema piano di vettori 60
Esempio 2.10 - Determinazione grafica del centro di un sistema di vettori paralleli e concordi 61
Esempio 2.11 - Calcolo analitico del centro di un sistema di vettori paralleli 62

3. REAZIONI VINCOLARI. EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA
3.1 Richiami sulla dinamica di un punto materiale libero 65
3.2 Moto di un punto vincolato. Vincoli olonomi unilateri e bilateri. 67
Esempio 3.3 - Punto vincolato su superficie sferica 68
Esempio 3.4 - Vincolo doppio 68
Esempio 3.5 - Vincolo Triplo 69
Esempio di Vincolo unilatero 69
3.3 Vincolo Liscio. Reazione Vincolare 70
Esempio 3.6 - Equilibrio tra Reazione Vincolare e Forza Applicata 71
3.4 Richiami sulla Dinamica di un Sistema di Punti Materiali 72
3.5 Richiami sulla Statica dei Sistemi 73

3.6 Sistemi Materiali Rigidi: 6 Gradi di libertà 74
3.7 Trave Vincolata 76
Esempio 3.7.1 - Carrello Orizzontale 77
Esempio 3.7.2 - Carrello verticale 77
Esempio 3.7.3 - Carrello Obliquo 78
Esempio 3.7.4 - Cerniera 78
Esempio 3.8 - Incastro 79
3.8 Metodo Analitico di Calcolo delle Reazioni Vincolari Mediante le Equazioni Cardinali della Statica 81
3.8.1 Classificazione Statica di una trave 83
Esempio 3.9 - Struttura isostatica 85
Esempio 3.10 - Struttura iperstatica 86
Esempio 3.11 - Struttura labile o ipostatica 87
Esempio 3.12 - Struttura apparentemente isostatica 87
Esempio 3.13 - Verifica di isostaticità e calcolo reazioni vincolari trave vincolata con 3 carrelli 89
3.9 Equilibrio di un sistema composto da due corpi rigidi. Arco a Tre Cerniere 92

4. RICHIAMI DI CINEMATICA. MOTI RIGIDI
4.1 Cinematica del punto 96
Esempio 4.1 - Moto circolare 100
Esempio 4.3 - Composizione di moti: moto elicoidale 104
4.2 Moti Rigidi 106
4.3 Angoli di Eulero 106
4.4 Formule di Poisson 110
4.5 Classificazione dei moti rigidi. Asse di Mozzi 112
4.5.1 Un esempio di composizione di moti rigidi: moto di precessione 115
4.6 Moti rigidi piani. Centro di Istantanea Rotazione 116
4.7 Diagramma degli spostamenti elementari in un moto Rigido Piano 119
4.8 Base e Rulletta 120
4.9 Richiami di Cinematica Relativa 121

Esempio 4.4 - Disco che rotola senza strisciare su una guida rettilinea 123
Esempio 4.5 - Moto di un'asta con gli estremi che si muovono su due assi ortogonali 124
Esempio 4.6 - Vettore velocità e traiettoria di un punto dell'asta dell'esempio 4.5 125

5. VINCOLI OLONOMI DIPENDENTI DAL TEMPO. SPOSTAMENTI VIRTUALI. PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI
5.1 Spostamenti reversibili e irreversibili. Spostamenti virtuali 127
Esempio 5.1 - Lavoro della Reazione Vincolare. Caso di un vincolo unilatero 128
Esempio 5.2 - Vincolo dipendente dal tempo. Spostamento Virtuale 129

5.4 Approfondimento su relazioni vincolari 131
5.2 Principio dei Lavoro Virtuali (PLV) 134
5.3 Applicazione del PLV al calcolo delle reazioni vincolari nelle strutture isostatiche 136

6. ELEMENTI DI CATENE CINEMATICHE. APPLICAZIONI ALL' ARCO A 3 CERNIERE
6.1 Allineamento dei Centri di Istantanea Rotazione nelle Catene Cinematiche 143
6.2 Relazione tra gli angoli delle due assolute rotazioni nel sistema degli spostamenti virtuali per l'arco a tre cerniere 145
6.3 Calcolo delle componenti orizzontale e verticale delle reazioni esplicate dalle cerniere fisse nell'arco a 3 cerniere 147
Esempio 6.1 - Calcolo della reazione esplicata dalla cerniera interna in un arco a 3 cerniere 150
Esempio 6.2 - Arco a 3 cerniere con le due aste ortogonali tra loro 152

7. GEOMETRIA DELLE MASSE
7.1 Centro di massa e baricentro di un sistema di n punti materiali 155
Esempio 7.1 - Teorema del moto del baricentro 156
7.2 Proprietà del centro di Massa per un Sistema Discreto di Punti Materiali 159
7.3 Funzione densità nei Sistemi Continui 162
Esempio 7.2 - Equilibrio di un corpo sospeso ad un punto. Equilibrio stabile, instabile, indifferente 163
7.4 Determinazione dei Centri di Massa (Baricentri) di particolari Sistemi Continui 165
Esempio 7.3 - Baricentro di un Triangolo omogeneo 165
Esempio 7.4 - Baricentro di un Rettangolo e di un parallelogramma omogenei con considerazioni geometriche 166
Esempio 7.5 - Calcolo analitico del Baricentro di un Arco di Circonferenza e di un Settore Circolare 166
Esempio 7.6 - Baricentro di una figura forata 167
Esempio 7.7 - Baricentro di un'asta 169
7.5 Richiami sull'integrazione doppia 169
7.5.1 Formule di Riduzione per Domini Rettangolari 172
Esempio 7.8 - Calcolo del baricentro di un rettangolo 172
7.5.2 Caso di dominio non rettangolare. Domini normali. Formule di Riduzione per Domini Normali 173
Esempio 7.9 - Calcolo Baricentro Triangolo 175
Esempio 7.10 - Calcolo del Baricentro di una sezione ad L 176
Esempio 7.11 - Baricentro Disco omogeneo 177

7.6 Momenti d'Inerzia. Teorema di Huygens 178
7.6 Ellissoide d'Inerzia 181
7.7 Ricerca degli Assi Principali d'Inerzia 184
Esempio 7.12 - Traslazione Sistema Assi Principali d'Inerzia 187
Esempio 7.13 - Calcolo dei Momenti d'inerzia di un'asta omogenea 189
Esempio 7.14 - Momenti d'inerzia di un Rettangolo omogeneo e terna Principale d'Inerzia 190
Esempio 7.15 - Momenti e prodotti d'inerzia di una lamina rettangolare forata con foro rettangolare 192
Esempio 7.16 - Terna principale centrale e momenti principali d'inerzia di un disco omogeneo di raggio R 194

8. MATRICE D'INERZIA
8.1 Diagonalizzazione della Matrice d'Inerzia. Soluzioni del Polinomio Caratteristico 195
Esempio 8.1 - Calcolo dei momenti principali d'inerzia per la lamina rettangolare forata dell'Esempio 7.15 mediante l'uso della matrice d'inerzia 197
Esempio 8.2 - Matrice di inerzia per un triangolo omogeneo 199
Esempio 8.3 - Uso della matrice d'inerzia per il calcolo dell'Energia Cinetica di un sistema materiale rigido in un atto di moto rotatorio 201

9. COMPLEMENTI DI GEOMETRIA DELLE MASSE: ELLISSE DI CULMANN, NOCCIOLO CENTRALE D'INERZIA
9.1 Ellisse di Culmann 202
9.2 Richiami sull' Antipolarità rispetto ad una ellisse reale 203
9.3 Nocciolo Centrale d'Inerzia 205
Esempio 9.1 - Nocciolo centrale d'inerzia per un rettangolo di lati a e b 206
Esempio 9.1 - Calcolo dei momenti principali centrali d'inerzia e nocciolo d'inerzia di una figura forata 207
Esempio 9.2 - Sezione a T 210
Esempio 9.3 - Nocciolo di un disco omogeneo 215

10. ESERCIZI DI PROVE INTERCORSO E DI ESAMI 216

BIBLIOGRAFIA 229

1. RICHIAMI DI ALGEBRA VETTORIALE

La maggior parte degli argomenti trattati in questo corso si basa sulla conoscenza dei vettori nella loro rappresentazione cartesiana e delle operazioni fra essi. In questo capitolo, per esigenze di completezza e per fissare le notazioni, vengono richiamate nozioni di base provenienti dai corsi di geometria e fisica e dalla matematica di base delle scuole medie superiori.
Considerato lo scopo strumentale di questo capitolo, verranno quasi sempre omesse le dimostrazioni.

1.1 Coordinate cartesiane nel piano

Indichiamo con Oxy una coppia di rette orientate dei numeri reali, mutuamente ortogonali in O, detta coppia di ***assi cartesiani di origine*** **O**. Oxy costituisce un sistema di riferimento cartesiano nel piano: esiste una corrispondenza biunivoca tra punti del piano e coppie di **numeri reali** dette coordinate.

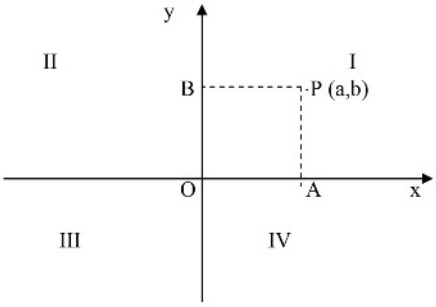


Figura 1.1 Assi Cartesiani nel piano

Nella Figura 1.1, x,y sono gli assi coordinati, O origine, P(a,b) punto del piano di coordinate a e b ε ***R*** *(insieme dei numeri reali)*, dove a è la coordinata x (ascissa) di P, misura della lunghezza del segmento OA (distanza di A dall'origine O), con A proiezione ortogonale di P sull'asse x; analogamente per b la coordinata y (ordinata) di P, misura della lunghezza del segmento OB (distanza di B dall'origine O), con B proiezione ortogonale di P sull'asse y. Il piano cartesiano è suddiviso dagli assi in 4 quadranti.
Nel I quadrante le coordinate x e y hanno valori positivi, nel II quadrante le x sono negative e le y positive, nel III quadrante sia x che y sono negative, nel IV quadrante le x sono positive e y negative.

Consideriamo ora nel piano Oxy una **circonferenza di centro O e di raggio r = 1** (*circonferenza goniometrica*).

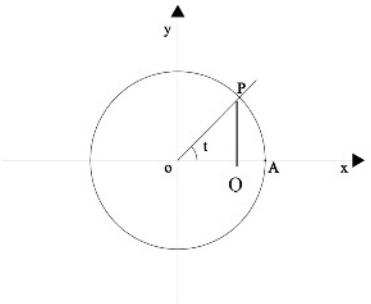


Figura 1.2 Circonferenza Goniometrica

Ricordiamo che la **lunghezza** dell'arco AP è per definizione la misura in **radianti** dell'angolo $A\hat{O}P = t$ e quindi la lunghezza di una semicirconferenza, π**=3,14...** (numero decimale illimitato aperiodico) è la misura in radianti dell'angolo 180°, $\pi/2$ sarà la misura in radianti di un angolo retto (90°), 2π corrisponderà a 360° etc…
Quindi, dalla Figura 1.2, poiché in un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'ipotenusa per il *seno* dell'angolo opposto oppure per il *coseno* dell'angolo adiacente, risulta, essendo l'ipotenusa il raggio unitario della *circonferenza goniometrica*:

$$\left.\begin{array}{l} \cos t \equiv OQ, \text{ coordinata x del punto P,} \\ \operatorname{sen} t \equiv PQ, \text{ coordinata y del punto P,} \\ \text{e inoltre} \\ \tan t \equiv \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \dfrac{PQ}{OQ} \qquad \forall\ t \in R. \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

con

$-1 \le \cos t \le 1,\ -1 \le \operatorname{sen} t \le 1,$ cioè $\quad |\cos t| \le 1,\ |\operatorname{sen} t| \le 1$

Essendo OP = 1, dal Teorema di Pitagora, vedi figura 1.1, si ha inoltre l'identità notevole:

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \forall t \in R \qquad (1.2)$$

Per convenzione, gli angoli crescono in senso antiorario e decrescono in senso orario

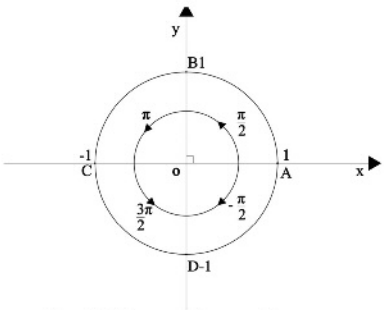


Fig.1.3 Convenzione sul segno

Alcuni utili valori notevoli:

A(1,0) $\Rightarrow$ cos0 = 1, sen0 = 0 C(-1,0) $\Rightarrow$ cos π = -1, sen π = 0

B(0,1) $\Rightarrow$ cos $\frac{\pi}{2} = 0$, sen $\frac{\pi}{2} = 1$ D(0,-1) $\Rightarrow$ cos $\frac{3}{2}\pi = 0$, sen $\frac{3}{2}\pi = -1$

Periodicità di 2π : cos x = cos $(x+2k\pi)$, sen x=sen$(x+2k\pi)$, $\forall k \in R$

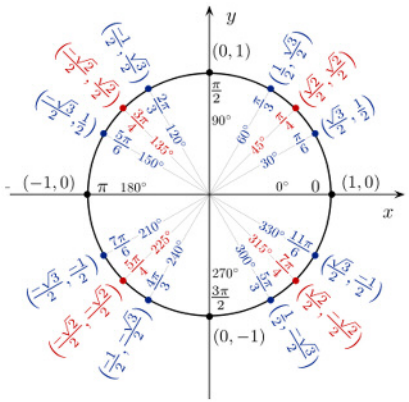
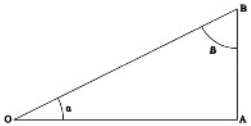


Figura 1.3 Valori principali di seno e coseno

Esempio 1.1: Nel triangolo rettangolo OAB determinare OA e AB se OB=2 e $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$$OA=2\cos\frac{\pi}{3} = 2\times\frac{1}{2} = 1,\ AB = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$



Verifica: $OA^2 + AB^2 = 1 + 3 = 4 = OB^2$

E anche: $AB = OA \tan\alpha$ *oppure* $OA = AB\tan\beta$

$$AB = 1 \text{ x } \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ x } 2 = \sqrt{3} \text{ e } OA = \sqrt{3}\tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \text{ x } \frac{1}{2} \text{ x } \frac{2}{\sqrt{3}} = 1$$

E' di notevole importanza e utilità per il seguito determinare il valore della ***distanza*** tra due punti $P(x_1 , y_1)$ e $Q(x_2 , y_2)$ del piano.

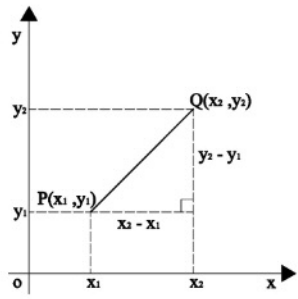


Figura 1.4 Formula della distanza fra due punti nel piano

Denotiamo con $\Delta x = x_2 - x_1$ l'incremento della variabile x e con $\Delta y = y_2 - y_1$ quello della variabile y che si ottiene nel passare dal punto $P(x_1, y_1)$ al punto $Q(x_2 ,y_2)$.
Dal teorema di Pitagora si ha che la distanza tra i due punti P e Q è:

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1.4)$$

In particolare, la distanza di P(x , y) dall' origine O(0 , 0) vale

$$PO = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ricordiamo che la **pendenza** ***m*** della retta **r** passante per $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ e inclinata di un angolo α rispetto alla retta orientata dell'asse delle x è data da:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (= \text{coefficiente angolare} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{PQ\,\text{sen}\alpha}{PQ\cos\alpha} = \text{tg}\alpha\ )$$

Poiché, comunque si scelgano i punti P e Q su **r** rimane invariato il valore di m, risulta

$$\forall P(x,y) \in r,\ m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y = m(x - x_1) + y_1 \Rightarrow \mathbf{y = mx + q} \qquad (1.5)$$

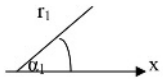
equazione esplicita della retta (con $q = y_1 - mx_1$)

Equazione implicita della retta: $Ax + By = C$

Esempio 1.2

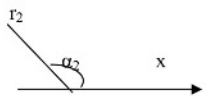
Pendenza della retta passante per A(1,3) , B(9,7)

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4}{8} > 0$$ **Pendenza positiva**, $\alpha_1 < \frac{\pi}{2}$



Pendenza della retta passante per P(2.5,8) , Q(6,1)

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{7}{3.5} < 0$$ **Pendenza negativa**, $\alpha_2 > \frac{\pi}{2}$



Inclinazione della retta: angolo α misurato in senso antiorario a partire dalla direzione positiva dell'asse x , $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$

1.2 Trasformazione di Coordinate

a) Traslazione degli assi cartesiani

Dato il punto $P(x_1, y_1)$ nel sistema di riferimento Oxy, operiamo una traslazione di tale sistema spostando l'origine O in O' di coordinate x_0, y_0 rispetto a Oxy. Ci chiediamo quali siano le coordinate di P in questo nuovo sistema di riferimento O'x'y'.

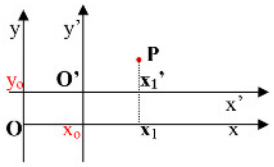


Figura 1.5 Traslazione del sistema di riferimento cartesiano

Si vede facilmente dalla figura che risulta

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_0 \\ y_1' = y_1 - y_0 \\ \text{e anche} \\ x_1 = x_1' + x_0 \\ y_1 = y_1' + y_0 \end{cases} \qquad (1.6)$$

Esempio 1.3 Trasliamo gli assi in modo che l'origine sia nel punto (3,2), la relazione tra le nuove e le vecchie coordinate dei punti risulta essere

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

Cerchiamo l'equazione della retta x = y (bisettrice del I e III quadrante) nelle nuove coordinate, poiché risulta

$$\begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' + 2 \end{cases}$$

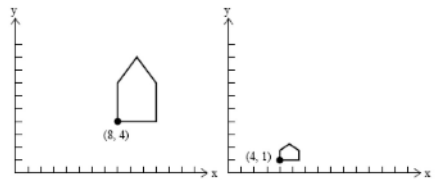
la retta avrà equazione

$x' + 3 = y' + 2$ ossia $y' = x' + 1$

b) Cambio di scala (SCALAMENTO) **nelle coordinate x e y:**

$$\begin{cases} x' = sx \\ y' = py \end{cases} \quad \text{con } s \text{ e } p \in R^+ \text{ } \textit{fattori di scala}$$

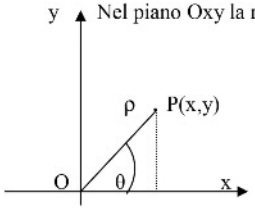
ESEMPIO 1.4



Scalamento di una casa con $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = \frac{1}{4}y \end{cases}$ Se i fattori di scala fossero stati maggiori di 1, la casa sarebbe stata più grande e più lontana dall'origine. Ovviamente con uno scalamento uniforme in x e in y, le proporzioni rimangono inalterate.

c) Coordinate polari nel piano

Un punto P(x,y) del piano può essere individuato anche assegnando le **coordinate polari** (ρ , θ), dove ρ è la distanza di P dall'origine,
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, e θ è l'angolo che il segmento OP forma con l'asse x.
L'origine O si chiama *polo*, la semiretta Ox *asse polare*, ρ *raggio vettore* e θ *anomalia*



Nel piano Oxy la relazione tra coordinate cartesiane e polari del punto P è:

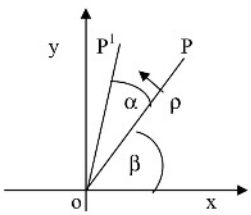
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\theta \end{cases} \quad \rho \in [0, +\infty) , \ \theta \in [0, 2\pi) \qquad (1.7)$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$

Figura 1.6 Coordinate polari

Osservazioni:
- Tutti i punti dell'*asse polare* hanno *anomalia* nulla
- L'equazione polare dell'*asse* é $\theta = 0$
- Tutte le rette passanti per il *polo* hanno un'equazione del tipo: θ = costante
- Un cerchio con centro nel *polo* ha un'equazione del tipo: ρ =costante
- Il *polo* ha *raggio vettore* nullo e *anomalia* indeterminata

d) Rotazione degli assi cartesiani



Nel piano Oxy le coordinate del punto P siano:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\beta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\beta \end{cases} \quad \rho \in [0, +\infty) , \ \beta \in [0, 2\pi)$$

Facciamo ruotare il punto P di un angolo α, la nuova posizione sarà P^1, con $OP = OP^1 = \rho$, e le sue coordinate rispetto a Oxy saranno

$$\begin{cases} x^1 = \rho\cos(\alpha+\beta) = \rho\cos\alpha\cos\beta - \rho\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta = x\cos\alpha - y\,\text{sen}\alpha \\ y^1 = \rho\,\text{sen}(\alpha+\beta) = \rho\,\text{sen}\alpha\cos\beta + \rho\cos\alpha\,\text{sen}\beta = x\,\text{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad (1.8)$$

$$\begin{cases} x^1 = x\cos\alpha - y\,\text{sen}\alpha \\ y^1 = x\,\text{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad (1.9)$$

Usando il formalismo della notazione matriciale, poniamo:

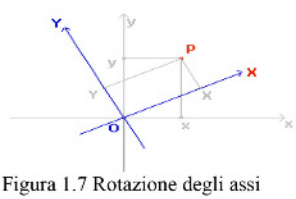
$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

E la (1.9) diventa:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (1.11)$$

A_α è detta matrice di rotazione di angolo α.

Equivalentemente: la matrice di rotazione rappresenta una trasformazione di coordinate che mette in relazione le coordinate di uno stesso punto rispetto a due terne ruotate l'una rispetto all'altra (di origine comune). Infatti, sia OXY la coppia di assi (in blù) ottenuta ruotando Oxy di un angolo α, allora se X e Y sono le coordinate del punto P rispetto agli assi O XY, le coordinate di P nel riferimento Oxy saranno:



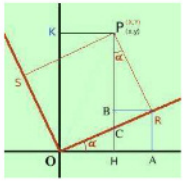
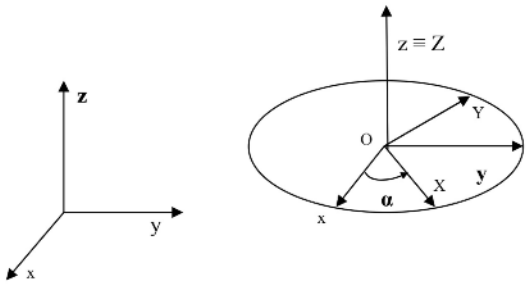


Figura 1.7 Rotazione degli assi

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\,\text{sen}\alpha \\ y = X\,\text{sen}\alpha + Y\cos\alpha \end{cases} \qquad (1.11)_{bis}$$

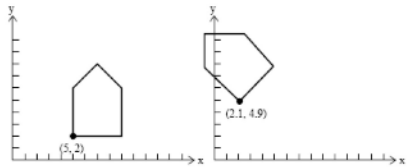
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_\alpha \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \qquad (1.12)$$

Nota che la (1.12) diventa, nel caso tridimensionale di rotazione intorno all'asse z:



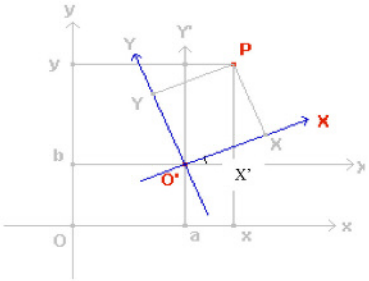
$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.12)_{bis}$$

Esempio 1.5



Rotazione di 45^0 $x = 5\sqrt{2}/2 - 2\sqrt{2}/2 = 2.1$; $y = 5\sqrt{2}/2 + 2\sqrt{2}/2 = 4{,}9$

e) Rototraslazione degli assi cartesiani: composizione di una traslazione, che porta l'origine O in O'(a,b) e una rotazione di angolo α intorno ad O'



traslazione 1) $\begin{cases} x = a + X' \\ y = b + Y' \end{cases}$

con X' e Y' le coordinate rispetto alla terna traslata OX'Y' ottenute dalla trasformazione delle coordinate X,Y rispetto alla terna ruotata

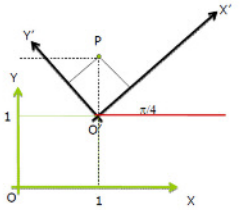
rotazione 2) $\begin{cases} X' = X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha \\ Y' = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$

QUINDI

rototraslazione 3) $\begin{cases} x = a + X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha \\ y = b + X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$ (1.13)

in forma matriciale $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + A_\alpha \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ (1.14)

Esempio 1.6: Sia P il punto di coordinate (1,1) nel sistema O'X' Y' che è ruotato di $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e traslato in O'(1,1) rispetto alla coppia di assi OXY. Determinare le sue coordinate (X_P , Y_P) nel sistema di riferimento OXY.



$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Esercizio proposto: con riferimento alla figura dell'esempio 1.6, a partire dalle coordinate (X_P, Y_P) determinare le coordinate (X'_P, Y'_P).

1.3 I Vettori nel Piano

Distinguiamo tra **grandezze scalari**, caratterizzate da un solo numero reale, es. la temperatura di un corpo umano $T \cong 36°$ C, e **grandezze vettoriali**, ad esempio la forza peso $\mathbf{p} = -mg\mathbf{k}$, che sono invece individuate oltre che da una grandezza scalare che ne fornisce l'intensità anche da una direzione e da un verso.
Quindi una grandezza vettoriale può essere agevolmente rappresentata mediante **un vettore geometrico** caratterizzato da tre elementi:

1) un numero reale non negativo che esprime la sua intensità (lunghezza o modulo)
2) Una retta che individua la sua direzione
3) Un verso

Con la notazione $\mathbf{v = B-A}$, con A(a, b), B(c, d), intenderemo un vettore che ha come direzione la retta passante per i punti A e B, il verso da A a B, l'intensità data dalla lunghezza del segmento AB come in Fig. 1

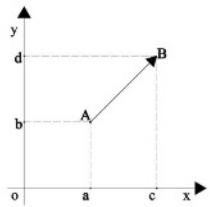


Fig.1.8 Vettore $\mathbf{v} = (\mathbf{B-A})$

Definiamo con v_x la componente sull'asse x del vettore **v** data dalla misura della lunghezza $v_x = (x_C - x_A) = (c-a)$ del segmento ottenuto dalla proiezione ortogonale dei punti A e B sull'asse x.

Analogamente definiamo la componente v_y sull'asse y del vettore **v** data dalla misura della lunghezza $v_y = (y_C - y_A) = (d - b)$. Quindi possiamo usare la notazione $\mathbf{v}(v_x, v_y)$ che, nella Fig. 1.8 corrisponde a **v**((c-a), (d-b))

Modulo del vettore **v**:

$$|\mathbf{v}| = |(B\text{-}A)| = \text{lunghezza del segmento AB} = \tag{1.15}$$

$$= \text{distanza tra i punti A e B} = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

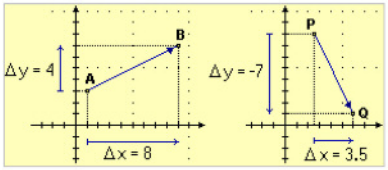
Risulta inoltre, dalla Fig. 1.8, per le componenti del vettore B-A:

$$v_x = AB \cos\alpha = |(B\text{-}A)| \cos\alpha = |\mathbf{v}| \cos\alpha = c\text{-}a, \tag{1.16}$$

dove α è l'inclinazione della retta su cui giace il vettore

$$v_y = AB \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = AB \operatorname{sen}\alpha = |\mathbf{v}| \operatorname{sen}\alpha = d\text{-}b$$

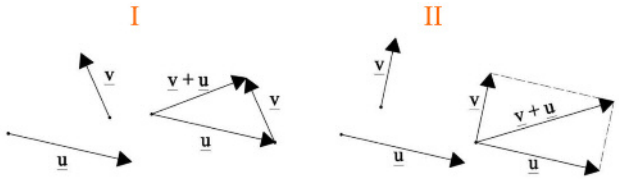
Esempio 1.6



$$|\mathbf{v}| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5} \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{3{,}5^2 + 7^2} = 7{,}82$$

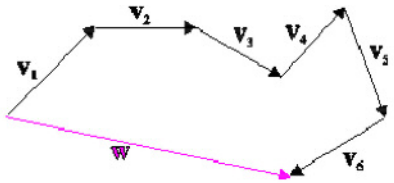
Possiamo costruire graficamente il vettore somma di 2 vettori mediante i seguenti 2 metodi:

I) Metodo Punta-coda; II) Metodo del parallelogramma



Nel primo caso, dopo aver riportato sulla freccia di **u** l'origine di **v**, il vettore somma **u** + **v** è il vettore che unisce l'origine di **u** con la punta della freccia di **v** (metodo punta-coda). Nel secondo, dopo aver riportato i due vettori nella stessa origine, **u** + **v** ha origine nell'origine comune e punta sul vertice opposto del parallelogramma di lati aventi la lunghezza dei vettori **v** e **u**, cioè è la diagonale di tale parallelogramma (metodo del parallelogramma).

Nel caso di più di due vettori si costruisce una spezzata con i vettori dati, a partire da un punto **arbitrario** del piano, riportando consecutivamente sulla punta del primo la coda del secondo, sulla punta del secondo la coda del terzo e così via.



Posto $\mathbf{v_1 = A_1\text{-}O;\ v_2 = A_2\text{-}A_1\ ;\ v_3 = A_3\text{-}A_2\ ;\ v_4 = A_4\text{-}A_3\ ;\ v_5 = A_5\text{-}A_4\ ;\ v_6 = A_6\text{-}A_5}$

risulta

$$\sum_{i=1}^{6} v_i = \mathbf{A_1\text{-}O + A_2\text{-}A_1 + A_3\text{-}A_2 + ...+ A_6\text{-}A_5 = A_6 - O = w} \qquad (1.17)$$

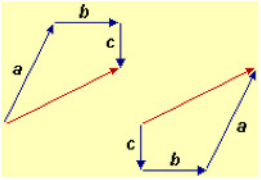
Quindi il vettore somma si costruisce congiungendo l'origine del primo vettore con la punta dell'ultimo.

Osservazione**:** durante tutto il testo delle presenti note si converrà che le notazioni **v,** $\underline{\mathbf{v}}$, $\vec{v}$ siano equivalenti.

Da notare che la notazione del vettore come "differenza di punti" gode delle stesse proprietà formali delle operazioni di somma e differenza algebrica.

Valgono la proprietà commutativa e associativa come si verifica facilmente.

Esempio 1.7 a+b+c=c+b+a con l'uso del metodo punta-coda

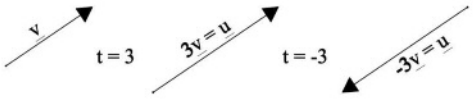


Il prodotto di un numero reale, t, per un vettore **v** produce un vettore **u tale che**:

$t\,\mathbf{v} = \mathbf{u}$ **vettore parallelo a v** concorde se $t > 0$ (stesso verso) (1.18)
discorde se $t < 0$ (verso opposto)

$t = -1$ $t\,\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ che si definisce **opposto** del vettore **v** (1.19)

Esempio 1.8 Vettori paralleli



Il modulo di tv è $|t|$ volte il modulo di **v** cioè $|tv| = |t|\,|v|$
dove $|t|$ è il valore assoluto del numero reale t

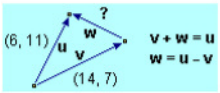
La differenza tra 2 vettori v e u : è la somma del primo con l'opposto del secondo
$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u})$$

Come si trasformano le **componenti** a seguito delle operazioni effettuate:

a) Siano $\mathbf{v}(a_1, b_1)$ e $\mathbf{u}(a_2, b_2)$ due vettori nel piano, allora si verifica facilmente che il vettore somma $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ ha componenti $a_1 + a_2$ e $b_1 + b_2$, cioè risulta $\mathbf{w}(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.

Esempio 1.9

Dati **u**(6,11) e **v**(14,7), applicando il metodo punta coda, risulta dalla figura che v+w=u e e quindi per le componenti di $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$: $w_x = 6 - 14 = -8$, $w_y = 11 - 7 = 4$.
Verifica: le componenti di $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ sono $14 - 8 = \mathbf{6}$, $7 + 4 = \mathbf{11}$ **e cioè u**(6,11)



b) Per il prodotto di un vettore **v**(a, b) per un numero reale t, risulta:

$$t\mathbf{v}(a,b) = \mathbf{u}(ta, tb)$$

1.4 Rappresentazione cartesiana dei vettori.

Nel piano cartesiano si definiscono due vettori di modulo unitario, molto importanti, detti **versori**

1) il **versore i** che unisce l'origine degli assi, punto O (0,0), con il punto di coordinate (1,0) sull'asse x e quindi risulta $|\mathbf{i}| = \sqrt{(1-0)^2 + 0} = 1$, modulo unitario.

2) il **versore j** che unisce l'origine O(0,0) con il punto di coordinate (0,1) sull'asse y e quindi, analogamente, $|\mathbf{j}| = 1$, modulo unitario

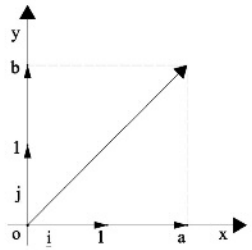


Figura 1.9 Versori degli assi cartesiani **i**(1,0) , **j**(0,1)

Ogni vettore di modulo unitario si chiama versore.

Consideriamo un vettore **v** di componenti (a,b) con origine in O. **Sia** $\mathbf{u}_1 = a\mathbf{i}$ il vettore parallelo a **i** e con origine in O e $\mathbf{u}_2 = b\mathbf{j}$ parallelo a **j** sempre con la stessa origine O, come in figura sopra, allora, per il metodo del Parallelogramma per la somma di due vettori, risulta:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(a,b) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \qquad (1.20)$$

corrispondente alla cosiddetta **rappresentazione cartesiana del vettore v**.

Nota Bene : a**i** è ***il*** *vettore componente* di **v** lungo la direzione x
a è ***la*** *componente* di **v** lungo la direzione x

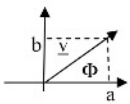
e analogamente

b**i** è ***il*** *vettore componente* di **v** lungo la direzione y
b è ***la*** *componente* di **v** lungo la direzione y

Inoltre , conoscendo l'inclinazione Φ di **v**, risulta per le componenti:

$$v_x = |\mathbf{v}|\cos\Phi = a \quad \text{e} \quad v_y = |\mathbf{v}|\operatorname{sen}\Phi = b\ ; \qquad (1.21)$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Esempio 1.10

Siano A(-1 , 2) , B(2 , 0) due punti del piano cartesiano, scrivere in forma cartesiana il vettore B-A = **v** e A-B = **u**

Calcoliamo le componenti:
componente x di **v** = 2- (-1) = 3 , componente y di **v** = 0 – 2= -2

quindi **v = 3i – 2j**

analogamente per **u** , si ha **u = - 3i + 2j = - (3i – 2j) = - v**
cioè **u** e **v** sono vettori opposti.

Esercizi proposti:

1) A(2,-1) , B(-1,4) scrivere in forma cartesiana il vettore $\underline{v}$ = B-A

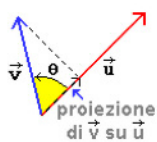
2) Se **u** = **i** – 2**j** , e **v** = 2**i** + **j** scrivere **v** + **u** in forma cartesiana

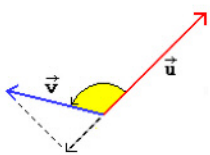
3) Se $\Phi = \frac{\pi}{4}$ è l'inclinazione di **v**, il cui modulo vale 4, calcolare la rappresentazione cartesiana di **v**

Si definisce Prodotto Scalare tra due vettori **v** e **u**, che formano un angolo θ, il seguente numero reale:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = |v|\,|u| \cos\theta \;\Rightarrow\; \text{commutativo} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \qquad (1.22)$$

Nota che |v|cos θ è la componente di v lungo la direzione di u





In particolare, risulta per i versori **i , j**

$$\begin{cases} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |i|\,|i| \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = |i|\,|j| \cos\frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \end{cases} \qquad (1.23)$$

Dalla definizione risulta che il prodotto scalare tra vettori ortogonali è nullo.

QUINDI

In base a (1.23) risulta che dati due vettori $\mathbf{v}(a,b) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, $\mathbf{u}(c,d) = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \cdot (c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) = ac\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + ad\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + bc\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + bd\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = ac + 0 + 0 + bd = ac + bd \quad (1.24)$$

Cioè il prodotto scalare tra 2 vettori è un numero reale dato dalla somma dei prodotti delle rispettive componenti.

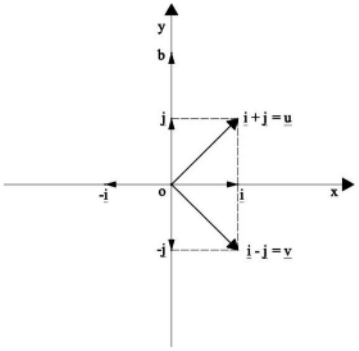
NOTA: in forma matriciale si ha

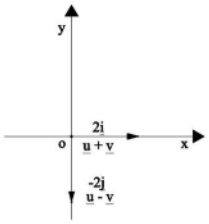
$$(a\ \ b)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (ac+bd)$$ vettore riga per vettore colonna

Esempio 1.11
Siano $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

Risulta:

1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = 2\mathbf{i}$
2) $\mathbf{v} - \mathbf{u} = -2\mathbf{j}$
3) $|\mathbf{u}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = |\mathbf{v}|$
4) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ **u e v sono perpendicolari cioè l'angolo compreso tra u e v è** $\frac{\pi}{2}$





Ancora sulle componenti di un vettore

Dato un vettore $\mathbf{v} = v_x \underline{\mathbf{i}} + v_y \underline{\mathbf{j}}$, le componenti soddisfano le seguenti relazioni:

$v_x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}$, $v_y = \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}$

come si verifica facilmente svolgendo i prodotti scalari.

VERSORE di un vettore

Dato un vettore **v**, il vettore **unitario u**, avente **la direzione e il verso di v** (si dice che **u** è il versore di **v**), si ottiene dividendo **v** per il suo modulo:

$$\text{vers } \mathbf{v} = \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \qquad (1.25)_a$$

Esempio

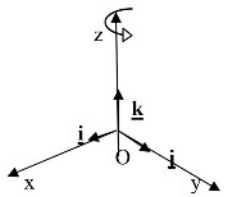
$\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

Verifica: $|\mathbf{u}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\mathbf{i} + \mathbf{j}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1$

Quindi posso scrivere $\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \text{ vers } \mathbf{v} = |\mathbf{v}| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = |\mathbf{v}| \mathbf{u}$ $\qquad (1.25)_b$

1.5 Vettori nello spazio R^3

Nello spazio tridimensionale si definisce (analogamente al caso del piano) una terna di assi cartesiani ortogonali fra loro, Oxyz, con origine O. La terna è orientata in verso antiorario, cioè, un osservatore con i piedi nell'origine O e la testa sulla freccia dell'asse z vede ruotare l'asse x sull'asse y in senso antiorario. I punti dello spazio sono individuati dalle coordinate (x,y,z) [corrispondenza biunivoca tra i punti e le terne di numeri reali]. Oltre ai versori degli assi x e y, **i** e **j**, denotiamo con **k** il versore dell'asse z che unisce l'origine con il punto (0,0,1).



i, j, k versori degli assi della terna cartesiana

Fig. 1.24 Terna Cartesiana nello spazio R^3

Consideriamo il punto P(a,b,c) e il vettore $\underline{\mathbf{v}}$ di origine il punto O(0,0,0) ed estremo P, $\underline{\mathbf{v}}$ = P-O, detto **vettore posizione** del punto P.

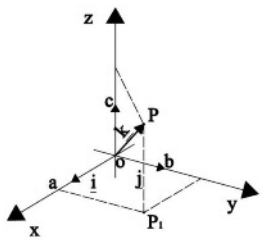


Fig. 1.25 $P_1(a,b,0)$ proiezione ortogonale di P sul piano xy

Graficamente: il vettore P_1-O, congiungente l'origine degli assi con il punto P_1, è la diagonale del parallelogramma costruito con i vettori $a\underline{\mathbf{i}}$ e $b\,\underline{\mathbf{j}}$.

Quindi si ha:

P_1- O = $a\underline{\mathbf{i}} + b\,\underline{\mathbf{j}}$ vettore nel piano xy, per la regola del parallelogramma

P_2-O = P- P_1 = $c\,\underline{\mathbf{k}}$, dove P_2 è la proiezione ortogonale di P sull'asse z, essendo c la coordinata z di P.
Applicando nuovamente la regola del Parallelogramma ai vettori P_1- O e $c\underline{\mathbf{k}}$

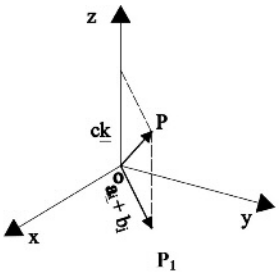


Fig 1.26 Il triangolo OP_1P è rettangolo in P_1. (P- P_1) = **ck**

Si ottiene la rappresentazione cartesiana del vettore v nello spazio tridimensionale

$$\mathbf{v = P\text{-}O = (P_1\text{-}O) + (P_2\text{-}O) = (P_1\text{-}O) + (P\text{-}P_1) = ai + b\,j + c\,k} \qquad (1.26)$$

Il modulo di $\underline{v}$ corrispondente alla lunghezza OP e cioè alla distanza del punto P dall'origine, sarà quindi per il Teorema di Pitagora:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(P_1 - O)^2 + (P_1 - O)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2) + c^2} \qquad (1.27)$$

Più in generale, la distanza fra due punti $P_1(x_1,y_1,z_1)$ e $P_2\,(x_2,y_2,z_2)$ nello spazio, sarà

$$P_1P_2 = |\mathbf{P}_2 - P_1)| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1.28)$$

Si estendono facilmente ai vettori nello spazio le regole introdotte nel caso piano (somma, prodotto per uno scalare, prodotto scalare tra due vettori). Essendo i tre versori mutuamente ortogonali, risulta

$$\mathbf{i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1} \qquad (1.29)$$

Quindi **Dati** $\mathbf{v} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\,\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$

Risulta

$$t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t(x_1 + x_2)\,\mathbf{i} + t(y_1 + y_2)\,\mathbf{j} + t(z_1 + z_2)\,\mathbf{k}\,, \quad \forall\, t \in R$$

e $$\mathbf{u \cdot v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Nota che: $$|\mathbf{u}| = \sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + z_2^{\,2}} = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$$

Inoltre, come nel caso piano, risulta per le componenti:

$x_1 = \mathbf{v \cdot i}$, $y_1 = \mathbf{v \cdot j}$, $z_1 = \mathbf{v \cdot k}$

COSENI DIRETTORI

Siano α, β, γ gli angoli che un vettore **v** forma con gli assi coordinati x,y,z, risulta allora dalla definizione di prodotto scalare:

$v_x = \mathbf{v \cdot i} = |\mathbf{v}|\ \cos\alpha$, $v_y = \mathbf{v \cdot j} = |\mathbf{v}|\ \cos\beta$, $v_z = \mathbf{v \cdot k} = |\mathbf{v}|\ \cos\gamma$ e quindi

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k} = |\mathbf{v}|\ (\cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}) \Rightarrow \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (\cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k})$$

$$\Longrightarrow \quad 1 = \left|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right| = \left|\cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}\right| = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \qquad (1.30)$$

Che è la ben nota proprietà dei coseni direttori

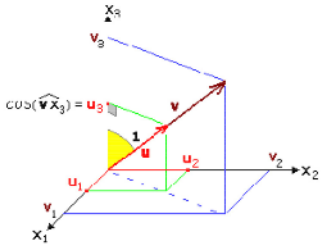


Fig. 1.27 Coseni direttori

1.6 Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale tra due vettori, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è un **vettore** caratterizzato dalle seguenti proprietà:

1) $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}| = |\mathbf{v}||\mathbf{u}| \operatorname{sen}\theta$, dove θ è l'angolo tra i due vettori **v** e **u** (1.31)

2) $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è perpendicolare al piano individuato da **u** e **v**

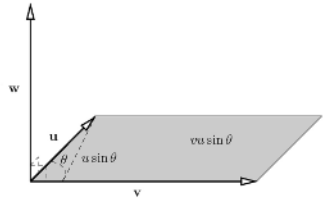
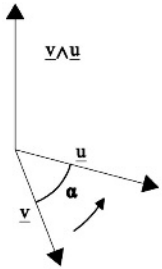


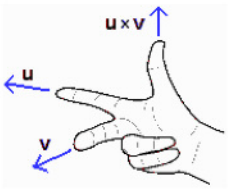
Fig. 1.28 Prodotto vettoriale

Dove:

$|u| \operatorname{sen}\theta$ = distanza della punta del vettore **u** dalla retta d'azione del vettore **v** (1.32)
o anche: $|u| \operatorname{sen}\theta$ = altezza del parallelogramma formato dai due vettori
$|v| |u| \operatorname{sen}\theta$ = area del parallelogramma

3) **v, u e** $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ formano, nell'ordine, una terna orientata in senso antiorario.





Dalla 1) segue che il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo in quanto se sono concordi l'angolo $\alpha = 0$, se sono discordi $\alpha = \pi$,

Dalla 3) si ha che il prodotto vettoriale non è commutativo infatti risulta

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = - \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$$

Vale la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto vettoriale

$$t\mathbf{u} \wedge (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = ta\, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + tb\, \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} \qquad t, a, b \in R$$

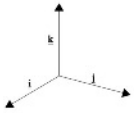
Dalle proprietà 1), 2), 3) segue

$$\begin{cases} \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = - \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{k}\,, \ \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = - \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{j}\,, \ \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = - \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{i} \\ \mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{cases} \qquad (1.33)$$

Componenti di $\underline{v} \wedge \underline{u}$:

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\,\mathbf{k}) \wedge (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) =$$

$$x_1y_2\, \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + x_1z_2\, \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} + y_1x_2\, \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} + y_1z_2\, \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + z_1\, x_2\, \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} + z_1\, y_2\, \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} =$$



$$= (x_1y_2 - y_1x_2)\, \underline{\mathbf{k}} + (-x_1z_2 + z_1\, x_2)\underline{\mathbf{j}} + (y_1z_2 - z_1\, y_2)\mathbf{i} \qquad (1.34)$$

Esempio 1.12

Per i vettori $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \wedge (-\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) =$$
$$2\mathbf{i}\wedge(-\mathbf{i}) + 2\mathbf{i}\wedge 2\mathbf{k} + 3\mathbf{j}\wedge(-\mathbf{i}) + 3\mathbf{j} \wedge 2\mathbf{k} + (-\mathbf{k}) \wedge (-\mathbf{i}) + (-\mathbf{k}) \wedge 2\,\mathbf{k} =$$
$$= 0 - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + 6\mathbf{i} + \mathbf{j} =$$
$$= -3\mathbf{j} + 6\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$$

USO DELLE MATRICI

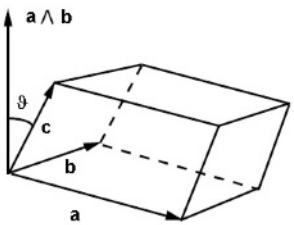
Il prodotto vettoriale tra due vettori può anche essere calcolato facendo lo sviluppo del determinante, secondo la prima riga, della seguente matrice **"simbolica":**

$$\underline{\mathbf{v}} \wedge \underline{\mathbf{u}} = \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{i}} & \underline{\mathbf{j}} & \underline{\mathbf{k}} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (1.35)$$

$$= \mathbf{i}(y_1z_2 - z_1y_2) - \mathbf{j}(x_1z_2 - z_1x_2) + \mathbf{k}(x_1y_2 - y_1x_2)$$

PRODOTTO MISTO DI 3 VETTORI a, b, c: $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

Dati tre vettori **a, b, c** $\varepsilon\ R^3$ lo scalare $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ si dice prodotto misto. Evidentemente l'operazione di prodotto vettoriale ha la precedenza sull'operazione di prodotto scalare altrimenti la scrittura non avrebbe senso, dovendo il prodotto vettoriale agire tra due vettori.



Geometricamente il prodotto misto rappresenta il volume del parallelepipedo i cui tre spigoli sono i tre vettori. Infatti possiamo scrivere:

Volume del parallelepipedo: Area di base per altezza

Area di base $= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\,\mathrm{sen}\beta = |\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}|$; altezza $h = |\mathbf{c}|\cos\vartheta = \mathbf{c}\cdot\mathrm{vers}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})$
se in particolare i 3 vettori sono mutuamente ortogonali allora risulta
$\beta = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta = 0$ e quindi $V = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$

Segue immediatamente che:

- Il prodotto misto si annulla: se almeno uno dei tre vettori è nullo; oppure se i tre vettori sono complanari. In questo caso infatti il volume del parallelepipedo è nullo.
- Se il prodotto misto di tre vettori non nulli è nullo, i tre vettori sono complanari (condizione di complanarità).
- Oltre alle proprietà conseguenti alle proprietà del prodotto vettoriale e del prodotto scalare, il prodotto misto gode della proprietà per cui è possibile scambiare l'operatore di prodotto vettoriale con l'operatore di prodotto scalare:

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\wedge\mathbf{c} \qquad (1.36)$$

espressione che risulta facilmente se si calcola il volume del parallelepipedo considerando come base il parallelelogrammo generato dai vettori **b** e **c**, anziché **a** e **b**. Sviluppando il prodotto misto mediante l'uso della matrice simbolica si verifica che esso si può interpretare come lo sviluppo, secondo gli elementi della terza riga, del determinante costruito con le componenti dei 3 vettori, per cui si ha:

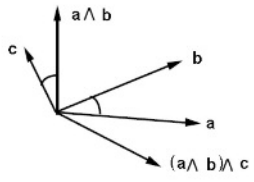
$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (1.37)$$

DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE

Dati tre vettori **a, b, c** $\in \mathbb{R}^3$ il vettore $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}$ si dice doppio prodotto vettoriale. Le parentesi sono necessarie per stabilire un ordine di precedenza tra i due prodotti vettoriali.
Sussiste la seguente relazione:

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a} \qquad (1.38)$$

E' in ogni caso facile rendersi conto che il doppio prodotto vettoriale è un vettore che appartiene al piano di **a e b**, in quanto $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ è ortogonale ad **a** e a **b** e il doppio prodotto è a sua volta ortogonale a $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$. Quindi deve appartenere al piano di **a** e **b.**



La regola mnemonica per sviluppare il doppio prodotto vettoriale è la seguente: si calcola prima il prodotto scalare del vettore esterno alla parentesi con il vettore più lontano e si moltiplica lo scalare ottenuto per il vettore più vicino; si sottrae poi il prodotto scalare del vettore esterno alla parentesi con il vettore più vicino moltiplicato per il vettore più lontano
Si verifica facilmente che non vale la proprietà commutativa.

Esempio 1.12

Calcolare l'equazione della retta r in R^3 passante per il punto P_0 e parallela alla direzione del vettore $\underline{\mathbf{v}}(a,b,c)$

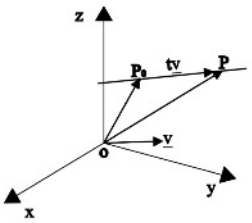


Figura 1.29 $P(x,y,z)$ $P_0(x_0,y_0,z_0)$ sono 2 punti della retta *r* parallela a **v**

Consideriamo una retta passante per un punto P_0 in R^3 e parallela al vettore $\underline{\mathbf{v}}$.
Un generico punto P sulla retta a distanza $|t\,\mathbf{v}|$ da P_0, con $t \in R$, soddisfa la seguente relazione

$$(P-O) = (P_0-O) + t\mathbf{v}\ ,\ t \in R \qquad (1.39)$$

(regola punta-coda della somma di due vettori con punti di applicazione non coincidenti)

v vettore direzione della retta, t**v** multiplo di **v**, t**v** vettore parallelo al vettore **v.**

Uguagliando le componenti dei vettori nella (1.39) si ha:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad (1.40)$$

Che sono le **Equazioni Parametriche della retta di direzione v** (di coseni direttori a,b,c).

Quindi , se $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ si ha

$$\frac{x - xo}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c} = t$$

cioè

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad (1.41)$$

Che sono le **Equazioni cartesiane della retta di direzione v** (di coseni direttori a,b,c).

Altro metodo:

Preso un terzo punto P_1 della retta, deve risultare

$$(P-P_0) \wedge (P_1-P_0) = 0$$

e quindi...

Esempio : Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per $P_0(5,-6,2)$ e parallela al vettore $\underline{v} = \underline{3i} + 12\underline{j} - 8\underline{k}$

$$\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -6 + 12t \\ z = 2 - 8t \end{cases} \qquad \frac{x-5}{3} = \frac{y+6}{12} = \frac{z-2}{-8}$$

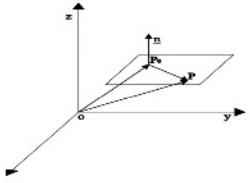
Esempio 1.13

Equazione del piano in R^3

Un piano nello spazio può essere individuato da un punto e da un vettore ortogonale al piano stesso o, equivalentemente, da tre punti appartenenti ad esso (per tre punti passa uno e un solo piano).

$P_0 (x_0 , y_0 , z_0) \in$ piano , **n**(a , b , c) un **qualsiasi** vettore ortogonale al piano (ortogonale a tutte le rette del piano), P(x , y , z) generico punto del piano

$(P-P_0)$ giace sul piano e quindi è perpendicolare a **n**



cioè $\mathbf{n} \cdot (P-P_0) = 0$

QUINDI

$$(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})[(x - x_0)\,\mathbf{i} + (y - y_0)\,\mathbf{j} + (z - z_0)\,\mathbf{k}] = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad \textbf{Equazione del piano} \qquad (1.42)$$

oppure $ax + by + cz = d \;,\; d = ax_0 + by_0 + cz_0$

se $d = 0$, $ax + by + cz = 0$ equazione di un piano passante per l'origine

Esempio 1.14: Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $P_0(-1,2,1)$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{n}$ (-1, 1,0)

$$-1(x-(-1)) + 1(y-2) + 0(z-1) = -(x+1) + (y-2) = 0 \Rightarrow -x + y = 3$$

che rappresenta un piano passante per il punto (-3,3) e parallelo all'asse z

Oppure: dati due altri punti P_1 e P_2 appartenente al piano, prendendo $\underline{\mathbf{n}} = (P_1\text{-}P_o)\wedge(P_2\text{-}P_1)$, risulta

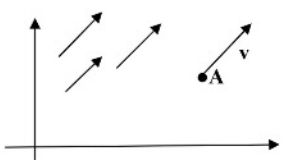
$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{P\text{-}P_0}) = (\mathbf{P_1\text{-}P_o})\wedge(\mathbf{P_2\text{-}P_1}) \cdot (\mathbf{P\text{-}P_0}) = \mathbf{0}$$

e quindi si può usare lo sviluppo della matrice 3x3 relativa al prodotto misto di tre vettori, come visto in precedenza.

1.7 Momento di un vettore applicato rispetto ad un polo

Negli esempi fin qui visti sono stati considerati due tipi di vettori:

1) **Vettori liberi**, quando non è specificato il punto di applicazione. Di conseguenza ad uno stesso vettore corrispondono nel piano ∞^2 (infiniti alla seconda) segmenti orientati aventi la stessa direzione, lo stesso verso, la stessa direzione (uno per ogni punto del piano).
2) **Vettori Applicati,** quando è specificato il punto di applicazione A . Di conseguenza il vettore è univocamente determinato dall'unico segmento orientato che ha origine nel punto considerato. Cioè tra tutti i vettori liberi che hanno lo stesso modulo, direzione e verso (uguali fra loro) ne consideriamo solo uno, quello applicato in A.
3) La coppia ordinata (A,**v**) **definisce il vettore applicato v con punto di applicazione A**.



Si definisce **momento** del vettore **v** applicato nel punto P rispetto al polo O, che indicheremo con **M**(O), la seguente espressione:

$$\mathbf{M}(O) = (P-O) \wedge \mathbf{v} \qquad (1.43)$$

M (O) vettore libero

Con riferimento al paragrafo 1.6, si ha:

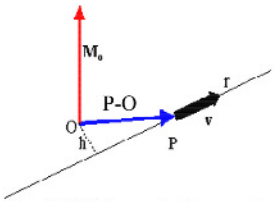


Fig. 1.30 Momento di un vettore applicato

Il modulo del vettore M(O) è: $|\mathbf{M}(O)| = |(P-O)|\,|\mathbf{v}|\,\text{sen}\alpha = h\,|\mathbf{v}|$, $(1.43)_{bis}$

$h = |(P-O)|\,\text{sen}\alpha \equiv$ braccio $\equiv$ distanza di O dalla retta r passante per P e con direzione di **v** **detta retta di azione** di **v.**

Il punto O viene anche detto centro di riduzione.

Se il vettore applicato rappresenta una forza, l'effetto del momento di una forza è sempre quello di produrre una rotazione attorno al polo:

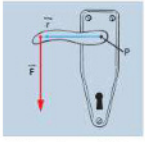
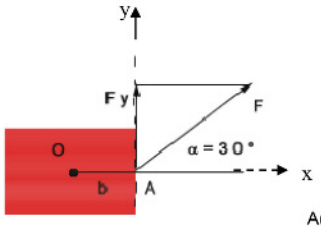


Fig. 1.31 Rotazione intorno al polo

Esempio1.15: Su un corpo fissato al punto O agisce una forza **F** applicata nel punto A a distanza 10m dal punto O, il cui modulo vale 10N, inclinata rispetto all'asse orizzontale x di un angolo $\alpha = 30°$. Calcolare il momento di **F** rispetto ad O, riferendosi alla coppia di assi cartesiani con origine in A.



A(0,0) , O(-10,0)

$\mathbf{M\,(O)} = (A\text{-}O) \wedge \mathbf{F}$, $(A\text{-}0) = [0 - (-10)]\mathbf{i} = 10\,\mathbf{i}$,

$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} = |F|\cos 30°\,\mathbf{i} + |F|\,\mathrm{sen}30°\,\mathbf{j} = 10\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + 10\frac{1}{2}\mathbf{j} = 5\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

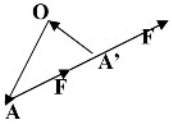
Quindi

$\mathbf{M\,(O)} = 10\mathbf{i} \wedge (5\sqrt{3}\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = 50\,\mathbf{k}$

direzione ortogonale al piano xy, verso uscente dal piano.

Esempio 1.16

Sia **F** un vettore applicato nel punto A e O un polo fissato.
Verificare che **M** (O) non varia se si sposta il punto di applicazione del vettore **F** lungo la sua retta d'azione nel punto A'.



Sia A' un punto sulla retta di azione di **F** e trasliamo il punto di applicazione A in A', aggiungendo e sottraendo A' in (A-O), **risulta:**

$$A\text{-}O = (A\text{-}A') + (A'\text{-}O)$$

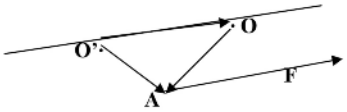
Quindi: $\mathbf{M(O)} = (A\text{-}O) \wedge \mathbf{F} = [\,(A\text{-}A') + (A'\text{-}O)\,] \wedge \mathbf{F} = (A'\text{-}O) \wedge \mathbf{F}$

essendo $(A\text{-}A') \wedge \mathbf{F} = 0$ **perché i due vettori sono paralleli.**

Esempio 1.17

Verificare che **M** (O) non varia se si sposta il polo O su una retta parallela a **F.**

Sia O' un polo sulla retta per O e parallela a **F**



Come prima, **aggiungiamo e sottraiamo** O **in** (A-O'), **risulta:**

$$(A\text{-}O') = (A\text{-}O) + (O\text{-}O')$$

Quindi: $\mathbf{M(O') = (A\text{-}O') \wedge F} = \left[(A\text{-}O) + (O\text{-}O')\right] \wedge \mathbf{F} = (A\text{-}O) \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{M(O)}$

Essendo $(O\text{-}O') \wedge \mathbf{F} = 0$ **perché i due vettori sono paralleli.**

NOTA: Negli Esempi 1.16 e 1.17

1) Abbiamo usato la somma algebrica dei punti rappresentativi dei vettori

2)Abbiamo applicato la tecnica di ***scomposizione di un vettore secondo due rette complanari e concorrenti in un punto*** **(**metodo punta-coda).

2. SISTEMI DI VETTORI APPLICATI

La teoria esposta in questo capitolo potrà sembrare ad una prima lettura molto astratta ma in realtà, come si vedrà nei capitoli 3 e 4, i risultati e le tecniche adoperate hanno ricadute fondamentali nelle applicazioni a problemi concreti della Statica e della Cinematica dei Corpi Rigidi.

2.1 Risultante e Momento Risultante. Asse Centrale

Si definisce **vettore applicato** la coppia ordinata (P, **v**), dove P è un punto del piano o dello spazio e **v** un vettore con origine in P. Consideriamo un sistema $S = \{(P_i, \mathbf{v}_i), i = 1,2,...n\}$ di n vettori applicati, si definisce *risultante* **R** del sistema il vettore libero

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i \qquad (2.1)$$

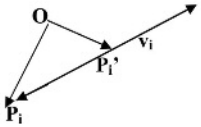
e *momento risultante* rispetto ad un polo O il vettore libero **M(O)**, somma dei momenti dei singoli vettori

$$\mathbf{M(O)} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M(O)}_i \qquad (2.2)$$

Estendendo al sistema S i risultati degli Esercizi 1.16 e 1.17 del paragrafo 1.7 del Cap.1, otteniamo:

1) Se facciamo variare i punti di applicazione dei vettori lungo le loro rette d'azione, i singoli momenti non variano e quindi il momento risultante non varia. Infatti, siano P'_i i nuovi punti di applicazione, si ha:

$P_i - O = (P_i - P'_i) + (P'_i - O)$, con P'_i sulla retta d'azione di $\mathbf{v}_i$.



(metodo punta-coda per la somma di vettori)

Essendo $(P_i - P'_i)$ parallelo a $\mathbf{v}_i$, risulta

$$\sum_{i=1}^{n} (P_i - P_i') \wedge v_i = 0$$

e quindi si ha

$$M(O) = \sum_{i=1}^{n} (P_i' - O) \wedge v_i$$

In particolare se tutte le rette d'azione dei vettori sono concorrenti in uno stesso punto P avremo, traslando tutti i punti P_i in P (**Teorema di Varignon**)

$$\mathbf{M(O)}=\sum_{i=1}^{n}(P_i-O)\wedge\mathbf{v_i}=\sum_{i=1}^{n}(P-O)\wedge\mathbf{v_i}=(P-O)\wedge\sum_{i=1}^{n}\mathbf{v_i}=(P-O)\wedge R$$

cioè il momento risultante del sistema dei vettori rispetto ad O coincide con il momento del risultante **R** pensato applicato in P.

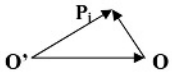
2) Dati due poli O e O' si ha la seguente relazione:

$$\mathbf{M(O')=M(O)+(O-O')\wedge R} \qquad (2.3)$$

legge di variazione del momento al variare del polo

come si verifica facilmente usando la scomposizione usata nell'Esercizio 1.17 del paragrafo 1.7 del Cap.1 :

$$P_i-O'=(P_i-O)+(O-O')$$



(metodo punta – coda per la somma di vettori)

$$\mathbf{M(O')}=\sum_{i=1}^{n}[(P_i-O)+(O-O')]\wedge\mathbf{v_i}=\mathbf{M(O)}+(O-O')\wedge\sum_{1}^{n}\mathbf{v_i}=\mathbf{M(O)}+(O-O')\wedge\mathbf{R}$$

CONSEGUENZE:

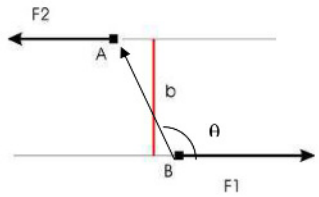
1) Come nel caso di un solo vettore, dalla (2.3) risulta che il momento è **invariante se** il polo si sposta su una retta **parallela** al risultante -

2) Si verifica immediatamente che se $\mathbf{R}=\mathbf{0}$ allora **M(O) è invariante** al variare di O, cioè si può parlare di momento prescindendo dal particolare polo.
(Vedremo che ciò si verifica nel caso delle Equazioni Cardinali della Statica dove, infatti, scegliamo il polo che più ci conviene ai fini del calcolo delle reazioni vincolari.)

Esempio 2.1

Coppia di vettori $(A, \mathbf{F_2})$, $(B, \mathbf{F_1})$, $\mathbf{F_1}=-\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}=\mathbf{0}$, $\mathbf{M(O)}=(A-O)\wedge\mathbf{F_2}-(B-O)\wedge\mathbf{F_2}=$

$=(A-B)\wedge\mathbf{F_2}$, **indipendente da O**



b ≡ braccio della coppia

Dalla (1.31) del Capitolo 1 si ha: $|M|=|(B-A)||\mathbf{F_2}|\text{sen}\theta=b|\mathbf{F_2}|$

Da notare che per una coppia di vettori risulta R=0 e quindi il momento è indipendente dal polo, come dimostrato sopra.

INVARIANTE SCALARE, INVARIANTE VETTORIALE

Come abbiamo visto, possiamo sempre scomporre un vettore in due vettori componenti lungo due direzioni assegnate, in particolare, possiamo scomporre, **M**(O), come in Figura 2.1, rispettivamente, in un componente $\mathbf{M}_p$ parallelo ad **R** e in uno $\mathbf{M}_n$ appartenente ad un piano π^* ad esso normale (ortogonale).

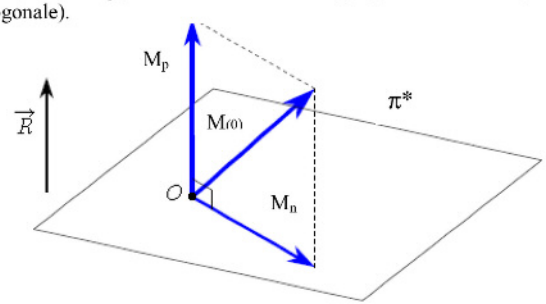


Figura 2.1 Scomposizione del momento risultante M(O) – il piano π^* è ortogonale ad **R**

Quindi

$$\mathbf{M}(O) = \mathbf{M}_p(O) + \mathbf{M}_n(O)$$

I Proprietà:

Il componente del momento, $\mathbf{M}_p$, parallelo alla direzione di R non varia al variare del polo.

Infatti, dalla **(2.3), se R≠0,** essendo il termine di variazione, **(O-O')** $\wedge$ **R** ortogonale al vettore risultante **R,** moltiplicando scalarmente per **R** risulta:

invariante scalare $\mathbf{M}(O') \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}(O) \cdot \mathbf{R}$ $\forall$ polo O (2.4)

in componenti risulta
trinomio invariante $M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z = \text{costante}$

Quindi, essendo per la definizione $(1.25)_a$ $\text{vers}\mathbf{R} = \dfrac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$ il versore del vettore risultante **R**, possiamo definire **l' invariante vettoriale $\mathbf{M}_p$** come **il** componente di **M(O)** nella direzione di **R,** vedi $(1.25)_b$, dato da**:**

$$\mathbf{M(O)}_p = M(O)_p \text{ vers } \mathbf{R} = \left[\frac{M(O)R}{|R|}\right]\frac{R}{|R|} = \frac{M(O)R}{R^2}R = M(O')_p \text{ vers } \mathbf{R} = \mathbf{M}_p(O') \qquad (2.5)$$

comunque si scelga il polo O'.

Dove $M(O)_p = M(O)\cdot\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$ è **la** componente di **M**(O) lungo la direzione orientata di **R.**

II Proprietà

ASSE CENTRALE

Dalla relazione

$$\mathbf{M}(O) = \mathbf{M}_p + \mathbf{M}_n(O)$$

sostituendo **M**(O) nella legge di variazione del momento al variare del polo **(2.3)** si ha

$$\mathbf{M}(O') = \mathbf{M}_p + \mathbf{M}_n(O) + (O-O') \wedge \mathbf{R} \qquad (2.6)$$

Vogliamo ricercare se esistono punti dello spazio, O', tali che **M**(O') si riduca alla sola parte parallela ad **R cioè tali che** $\mathbf{M}_n(O') = 0$ e, quindi, $\mathbf{M}(O') = \mathbf{M}_p$

E cioè, dalla (2.2), punti che soddisfino l'equazione**:**

$$\mathbf{M}_n(O) + (O-O') \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0} \qquad (2.7)$$

Si dimostra che il luogo dei punti O' che soddisfano tale equazione è una retta, detta ASSE CENTRALE, con le seguenti proprietà:
a) è parallela alla direzione del vettore risultante R
b) appartiene ad un piano ortogonale ad $\mathbf{M}_n(O)$ **e su cui giace R**
c) passa per il punto A del piano soddisfacente la relazione

$$(A-O) = \frac{R \wedge M(O)}{R^2} \qquad (2.8)$$

Scegliendo O come origine di un sistema di riferimento, si ha quindi per le coordinate cartesiane del punto A:

$$x_A = \frac{R_y M_z - R_z M_y}{R^2}, \quad y_A = \frac{R_z M_x - R_x M_z}{R^2}, \quad z_A = \frac{R_x M_y - R_y M_x}{R^2}$$

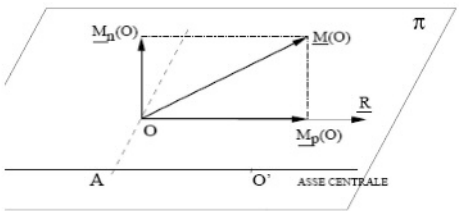


Fig. 2.2 Individuazione dell'asse centrale con R e M_p giacenti sul piano π

DIMOSTRAZIONE

Bisogna studiare l'equazione vettoriale

$$\mathbf{M}_n(O) = (O'\text{-}O) \wedge \mathbf{R} \text{ nell'incognita } (O'\text{-}O), \qquad (2.9)$$

Moltiplicando scalarmente sinistra e a destra per (O'-O), **risulta**

$$\mathbf{M}_n(O) \cdot (O'\text{-}O) = (O'\text{-}O) \wedge \mathbf{R} \cdot (O'\text{-}O) = \mathbf{0}$$

E' evidente, quindi, che il vettore (O'-O) **sarà su di un piano π ortogonale ad $\mathbf{M}_n(O)$ e su cui giace R.**
Inoltre notiamo che se A è un punto di π, diverso da O', appartenente ad una retta parallela ad R e passante per O', risulta:

$$\mathbf{M}_n(O) = (O'\text{-}O) \wedge \mathbf{R} = (O'\text{-}A+A\text{-}O) \wedge \mathbf{R} = (A\text{-}O) \wedge \mathbf{R} \qquad (2.10)$$

con (A-O) sul piano π e (A-O) perpendicolare ad **R.**

Graficamente si ha la Figura 2.2 dove si è scelto O sulla retta per **R e la terna ortogonale** $\mathbf{M}_n(O)$, **(A-O), R risulta levogira.**

NOTA Il fatto che **R** ed **M** sono vettori liberi ci consente di rappresentarli come nella figura applicandoli in O.
Il momento rispetto ai punti dell'asse centrale ha il modulo minimo rispetto ad altri punti non appartenenti ad esso.

E' evidente che tutti i punti O' su una **retta parallela** ad **R** e passante per il punto A soddisfano l'equazione (2.8)**: tale retta si chiama *asse centrale*.**
Per la ricerca analitica di questa retta basta determinare quel punto A tale

$$(A\text{-}O) \wedge \mathbf{R} = \mathbf{M}_n(O) \quad \mathbf{e} \quad (A\text{-}O) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{0} \qquad (2.11)$$

A tale scopo, moltiplichiamo vettorialmente **a destra** la prima delle (2.11) per **R**:

$$(A\text{-}O) \wedge \mathbf{R} \wedge \mathbf{R} = \mathbf{M}_n(O) \wedge \mathbf{R}$$

Ricordiamo la (1.38) del Cap. 1 (regola del doppio prodotto vettoriale):

$$(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$$

Quindi risulterà

$$\mathbf{M}_n(O) \wedge \mathbf{R} = -\mathbf{R}^2 (A\text{-}O) \qquad \textbf{essendo } (A\text{-}O) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

e le coordinate del punto x_A, y_A e z_A di A soddisferanno la seguente equazione

$$(A-O) = \frac{M_n(O) \wedge R}{-R^2} = \frac{R \wedge M_n(O)}{R^2} = \frac{R \wedge M(O)}{R^2}, \text{ essendo } R \wedge M_p = 0$$

Cioè, in componenti

$$x_A = \frac{R_y M_z - R_z M_y}{R^2} \quad , \quad y_A = \frac{R_z M_x - R_x M_z}{R^2} \quad , \quad z_A = \frac{R_x M_y - R_y M_x}{R^2}$$

Fine dimostrazione.

QUINDI: L'asse centrale è la retta passante per il punto A e parallela ad R i cui punti O' hanno la proprietà che il momento risultante rispetto ad essi si riduce al solo componente parallelo ad R , cioè, si ha che $\mathbf{M}(O') \equiv \mathbf{M}_p \; , \forall$ O' $\in$ asse centrale.

Per determinare l'equazione di tale retta osserviamo dalla Fig. 2.2 che, preso un generico punto O'(x,y,z) sull'asse centrale, risulta

$$\mathbf{(O'- A)} = t\,\mathbf{R} \qquad \forall \text{ numero reale } t \qquad \textbf{(2.12)}$$

da cui, assunto O(0,0,0) come origine del sistema di riferimento, possiamo scrivere:

$$(O'\text{-}O + O\text{-}A) = t\,\mathbf{R}$$

e cioè $$(O'\text{-}O) = (A\text{-}O) + t\,R = \frac{R \wedge M(O)}{R^2} + t\,\mathbf{R}$$ equazione dell'asse centrale **(2.13)**

NOTA
Avendo dimostrato l'esistenza dell'asse centrale, un altro modo di ricavare l'equazione di tale retta consiste nell'osservare che per un generico punto P(x,y,x) su tale retta, risulta

$$\mathbf{M}(P) = \mathbf{M}_p = t\,\mathbf{R} \quad \text{con t numero reale}$$

corrispondente alle equazioni scalari:

$$\frac{M_x(x,y,z)}{R_x} = \frac{M_y(x,y,z)}{R_y} = \frac{M_z(x,y,z)}{R_z}$$

corrispondenti alle equazioni di due piani la cui intersezione è la retta asse centrale del sistema.

NOTA BENE
L'asse centrale è la retta luogo geometrico dei punti dello spazio, che
presi come poli di riduzione, rendono il momento risultante M(O) **di minimo modulo oppure nullo.**
Infatti, per un qualsiasi punto O, il modulo del vettore M(O) è dato da

$$|M(O)| = \sqrt{M_p^2 + M(O)_n^2}$$

che quindi assume valore minimo solo se O appartiene all'asse centrale dove risulta
$\mathbf{M_n(O)=0}$ **e quindi** $|M(O)| = \sqrt{M_p^2} = |M_p|$

OSSERVAZIONE. Come vedremo in seguito, la teoria dei vettori applicati trova una delle sue principali applicazioni nella Statica dei corpi rigidi. In questo capitolo della meccanica i vettori applicati in gioco sono le forze direttamente applicate (per es. i carichi) e le reazioni vincolari esercitate da appoggi, incastri, strutture di sostegno che, insieme ai momenti risultanti, concorrono a mantenere in equilibrio un corpo. Ci sono perciò delle evidenti ragioni di convenienza che conducono a ricercare le condizioni per le quali si rendono minimi gli effetti delle sollecitazioni a cui le strutture di sostegno vengono sottoposte. Ora in un sistema di vettori applicati i vettori principali sono **R** ed **M**(O): di questi due il primo è fissato una volta che si sia assegnato il sistema di forze mentre **M**(O) è variabile in dipendenza del polo. Ecco quindi perché è importante ricercare, se esistono, dei punti che presi come poli di riduzione rendano minimo il modulo del momento e quindi l'effetto di rotazione da esso prodotto.

Esempio 2.1 Calcolo momento risultante, invariante, equazione asse centrale

Dati i vettori
$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ applicato in $P_1(0,0,1)$
$\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ applicato in $P_2(1,-1,0)$

a) calcolare il momento risultante rispetto al punto O(0,0,0) e rispetto al punto O'(0,0,1)
b) trovare l'invariante scalare e l'invariante vettoriale
c) verificare la legge di variazione del momento
d) determinare l'equazione dell' asse centrale

Soluz.

a) $\mathbf{M}(O) = \sum_{i=1}^{2} (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i = (P_1 - O) \wedge \mathbf{v}_1 + (P_2 - O) \wedge \mathbf{v}_2$

$P_1 - O = \mathbf{k}$, $P_2 - O = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

quindi, servendosi della matrice simbolica si ha

$$\mathbf{k} \wedge (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

e

$$(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \wedge (\mathbf{i} - \mathbf{k}) = \mathbf{j} + \mathbf{k} + \mathbf{i}$$

Dunque

$$\mathbf{M}(O) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{j} + \mathbf{k} + \mathbf{i} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Poiché O' coincide con P_1 allora si ha

$$\mathbf{M}(O') = \sum_{i=1}^{2} (P_i - O') \wedge \mathbf{v}_i = (P_2 - O') \wedge \mathbf{v}_2 = (\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \wedge (\mathbf{i} - \mathbf{k}) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$$

b) Ci occorre calcolare il vettore risultante **R**

$$\mathbf{R} = \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2 = 2\underline{\mathbf{i}} - 3\underline{\mathbf{j}} + 4\underline{\mathbf{k}} + \underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{k}} = 3\underline{\mathbf{i}} - 3\underline{\mathbf{j}} + 3\underline{\mathbf{k}}$$

per calcolare l'invariante scalare, $\mathbf{I} = \mathbf{M}(O) \cdot \mathbf{R}$, come segue:

$$\mathbf{M}(O) \cdot \mathbf{R} = (4\,\underline{\mathbf{i}} + 3\,\underline{\mathbf{j}} + \underline{\mathbf{k}}) \cdot (3\underline{\mathbf{i}} - 3\underline{\mathbf{j}} + 3\underline{\mathbf{k}}) = 12 - 9 + 3 = 6$$

$$\mathbf{M}(O') \cdot \mathbf{R} = (\underline{\mathbf{i}} + \underline{\mathbf{k}}) \cdot (3\underline{\mathbf{i}} - 3\underline{\mathbf{j}} + 3\underline{\mathbf{k}}) = 3 + 3 = 6$$

cioè, abbiamo verificato che al variare del polo varia il momento risultante ma l'invariante scalare resta uguale.

invariante vettoriale $\qquad \mathbf{M}_p(O) = \dfrac{\mathbf{M}_{(O)R}}{R^2}\mathbf{R} = \dfrac{6}{27}(3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = \dfrac{2}{3}(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$

c) Dobbiamo verificare

legge di variazione del momento $\mathbf{M}(O') = \mathbf{M}(O) + (O\text{-}O') \wedge \mathbf{R}$

$$(O\text{-}O') \wedge \mathbf{R} = -\underline{\mathbf{k}} \wedge (3\underline{\mathbf{i}} - 3\underline{\mathbf{j}} + 3\underline{\mathbf{k}}) = -3\underline{\mathbf{i}} - 3\underline{\mathbf{j}}$$

e quindi

$$\mathrm{M}(O') = 4\,\underline{\mathbf{i}} + 3\,\underline{\mathbf{j}} + \underline{\mathbf{k}} - 3\underline{\mathbf{i}} - 3\underline{\mathbf{j}} = \underline{\mathbf{i}} + \underline{\mathbf{k}}$$ uguale al valore calcolato sopra

d)$_1$ Se P (x,y,z) è un punto generico dell'asse centrale, per calcolare l'equazione di tale asse possiamo imporre che $\mathbf{M}(P)$ sia parallelo ad **R e cioè,** $\mathbf{M}(P) = \lambda\,\mathbf{R}$, λ numero reale.

$$\mathbf{M}(P) = (P_1 - P) \wedge \underline{\mathbf{v}}_1 + (P_2 - P) \wedge \underline{\mathbf{v}}_1 = (4\text{-}3y\text{-}3z)\,\underline{\mathbf{i}} + (3 + 3x - 3z)\,\underline{\mathbf{j}} + (1+3x+3y)\underline{\mathbf{k}}$$

e quindi risulta

$$\frac{4-3y-3z}{3} = \frac{3+3x-3z}{-3} = \frac{1+3x+3y}{3}$$ equazioni dell'asse centrale (2.14)

$$4 - 3y - 3z = -3 - 3x + 3z = 1 + 3x + 3y$$

Corrispondente alla retta intersezione dei due seguenti piani (i punti P di una retta r nello spazio corrispondono alle soluzioni di un sistema lineare compatibile di due equazioni nelle tre incognite x, y e z).

$$\begin{cases} +3x - 3y - 6z + 7 = 0 \\ -6x - 3y + 3z - 4 = 0 \end{cases} \qquad (2.15)$$

Verifichiamo che essi non siano paralleli utilizzando il teorema di Rouchè-Capelli:

$$A = \begin{pmatrix} +3 & -3 & -6 \\ -6 & -3 & +3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} +3 & -3 & -6 & +7 \\ -6 & -3 & +3 & -4 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che la matrice dei coefficienti A e la matrice completa B hanno lo stesso rango uguale a 2, il sistema è quindi compatibile e ammette infinte soluzioni che dipendono da una incognita libera.

d)$_2$ Verificare il risultato ottenuto al punto d)$_1$ utilizzando l'equazione dell'asse centrale

$$\mathbf{(P\text{-}O)} = \frac{R \wedge M\ (O)}{R^2} + t\,\mathbf{R}$$

$$R \wedge M(O) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$$

$$\mathbf{(P\text{-}O)} = \frac{-12\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 21\mathbf{k}}{27} + t\ \mathbf{(3i - 3j + 3k)}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-12}{27} + 3t \\ y = \dfrac{9}{27} - 3t \\ z = \dfrac{21}{27} + 3t \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{3}(x + \dfrac{4}{9}) = t \\ -\dfrac{1}{3}(y - \dfrac{1}{3}) = t \\ \dfrac{1}{3}(z - \dfrac{7}{9}) = t \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}(x + \frac{4}{9}) = -\frac{1}{3}(y - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}(z - \frac{7}{9})$$

$$(x + \frac{4}{9}) = -(y - \frac{1}{3}) = (z - \frac{7}{9})$$

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{9} = 0 \\ x - z + \dfrac{11}{9} = 0 \end{cases} \qquad (2.16)$$

Quindi, come prima, l'asse centrale sarà dato dall'intersezione dei due piani (2.16).
Verifichiamo che essi rappresentano la stessa retta (2.14).

Scegliamo per l'incognita libera z il valore zero. La soluzione di (2.16) corrispondente a z=0 è

$$\begin{cases} y = +\dfrac{10}{9} \\ x = -\dfrac{11}{9} \end{cases}$$

Essa risulta essere soluzione del sistema (2.15). Infatti, con z=0 il sistema diventa

$$\begin{cases} +3x - 3y + 7 = 0 \\ -6x - 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

E si verifica immediatamente che $x = -\dfrac{11}{9}$ e $y = +\dfrac{10}{9}$ è soluzione.

2.2 Invariante Scalare Nullo

Essendo $\mathbf{M(O) = M_p + M_n(O)}$, nel caso in cui il componente $\mathbf{M_p}$ sia nullo (se vale per un polo vale per tutti!) allora rispetto ai punti **O' dell'asse centrale (** per i quali $\mathbf{M_n(O') = 0}$), risulterà **$\mathbf{M(O') = 0}$ e quindi** l'invariante scalare **$\mathbf{I = M(O') \cdot R}$ è nullo.**

Quando ciò accade?

***a)* quando le rette di applicazione dei vettori sono concorrenti in un punto P:**
in tal caso infatti, **per il teorema di Varignon,** il momento è perpendicolare al risultante in quanto

$\mathbf{M(O)} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i = (P - O) \wedge \mathbf{R}$ e quindi $\mathbf{M_p = 0}$ e $\mathbf{M(O') = 0}$ $\forall$ O' $\in$ **asse centrale (I=0)**

***b)* quando i vettori sono tra loro paralleli con $\mathbf{R \neq 0}$:**

sia **u** il versore della comune direzione e t_i , i=1, 2, …n, gli scalari tali che $\mathbf{v_i} = t_i \mathbf{u}$ denotino gli n vettori applicati in P_i, $t_i > 0$ se $\mathbf{v_i}$ è equiverso a **u**, $t_i < 0$ in caso contrario, allora risulta

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} t_i \underline{u} = t\underline{u} \qquad \text{con } t = \sum_{i=1}^{n} t_i \tag{2.17}$$

$$\mathbf{M(O)} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathbf{v_i} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge t_i \underline{u} = [\sum_{i=1}^{n} t_i (P_i - O)] \wedge \underline{u} \tag{2.18}$$

Cioè, il momento risultante è perpendicolare alla direzione comune **u** del risultante **R** dei vettori e e quindi $\mathbf{M_p = 0}$ e $\mathbf{M(O') = 0}$ $\forall$ O' $\in$ **asse centrale (I=0)**

***c)* quando i vettori sono complanari ed il polo O appartiene al piano comune**
in tal caso infatti il risultante **R** appartiene al piano comune dei vettori, il momento di ogni singolo vettore è ortogonale al piano e quindi lo è anche il momento risultante (**Invariante nullo**). (Vedi ad esempio il caso delle forze attive e vincolari agenti su una trave nel piano)

QUINDI in questi 3 casi, essendo $M_P = 0$, risulta $M(O) = 0$ se O appartenente all'asse centrale.

Esempio 2.2

Dati i due vettori

$\underline{u_1} = \underline{i} - \underline{j}$ applicato in $P_1(-1 , 0)$
$\underline{u_2} = -2\,\underline{i} + \underline{j}$ applicato in $P_2(0 , 1)$

a) Verificare che l'invariante scalare è nullo
b) Determinare l'equazione dell'asse centrale

Soluz.
a) essendo il sistema dei due vettori piano il momento risultante sarà ortogonale al piano da essi individuato e quindi al vettore risultante $\mathbf{R} = -\mathbf{i}$. Scegliendo come polo il punto P_1 si ha:

$$\mathbf{M}(P_1) = (P_2 - P_1) \wedge \mathbf{u_2} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \wedge (-2\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \mathbf{k} + 2\mathbf{k} = 3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{I} = \mathbf{M}(P_1) \cdot \mathbf{R} = 3\mathbf{k} \cdot -\mathbf{i} = 0$$

b) Essendo **$M(O) = 0$ con $O(x,y)$ appartenente all'asse centrale, si ha:**

$$\mathbf{M}(O) = (P_1 - O) \wedge \mathbf{u_1} + (P_2 - O) \wedge \mathbf{u_2} = 0$$

quindi

$$[(-1-x)\mathbf{i} + -y\,\mathbf{j}] \wedge (\mathbf{i}-\mathbf{j}) + [-x\,i + (1-y)\mathbf{j}] \wedge (-2\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 0$$

$$(-y + 3)\mathbf{k} = 0$$

Che fornisce per l'asse centrale la retta $y = 3$ (parallela ad **R** come **deve essere).**

2.3 Sistemi equivalenti. Sistemi equilibrati

Siano $S = (P_i, \mathbf{v_i})$ e $S' = (P_j', \mathbf{v_j'})$ $i = 1,2,\ldots n$; $j=1,2,..m$, due sistemi di vettori applicati, non aventi necessariamente lo stesso numero di vettori ($n \neq m$).

DEFINIZIONE 2.3: S e S' sono tra loro **equivalenti** se risulta

$$\mathbf{R} = \mathbf{R'} \text{ e } \mathbf{M}(O) = \mathbf{M'}(O), \text{ O polo fissato} \qquad (2.17)$$

Nota Bene. L'uguaglianza dei **R**isultanti implica che in realtà la definizione di equivalenza non dipende dal polo scelto. Cioè, verificata l'uguaglianza dei momenti rispetto ad un polo, essa risulta verificata rispetto ad **ogni altro polo.**

Infatti, dalla legge di variazione dei momenti:

per il sistema S si ha: $\mathbf{M(O')} = \mathbf{M(O)} + (O-O') \wedge \mathbf{R}$
per S' si ha: $\mathbf{M'(O')} = \mathbf{M'(O)} + (O-O') \wedge \mathbf{R'}$

Quindi , essendo R=R' e M(O) = M'(O), risulta $\mathbf{M(O')} = \mathbf{M'(O')}$, $\forall\ O' \in R^3$

Segue dalla definizione e dall'equazione dell'asse centrale che 2 sistemi equivalenti hanno lo stesso asse centrale

Ogni sistema di vettori applicati è equivalente al sistema costituito dal proprio risultante R applicato in un punto qualsiasi O e da una coppia di momento M(O).

Infatti: sia S un sistema con risultante **R** e momento risultante **M**(O) rispetto ad un polo O e sia S' un sistema costituito dal vettore R applicato in O e da una coppia di vettori di momento M(O), evidentemente risulta che S e S' sono equivalenti in quanto:

S'= [(O, R) + coppia di vettori $(A, \mathbf{v})$, $(B, -\mathbf{v})$ di momento $\mathbf{M}(0)]$, per cui risulta

$\mathbf{R'} = \mathbf{R} + \mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{R}$ e $\mathbf{M'}(O) = (O-O) \wedge \mathbf{R} + \mathbf{M(O)} = \mathbf{M}(O)$, cioè S e S' sono equivalenti.

CASI Particolari di Sistemi Equivalenti

a) **S' ottenuto facendo scorrere i vettori di S lungo le loro rette d'azione è equivalente S**
(ricordando che il momento non varia se faccio scorrere un vettore lungo la sua retta d'azione)

b) **Se i vettori di un sistema S sono concorrenti in uno stesso punto P allora il sistema S' = (P, R), costituito dal solo vettore risultante applicato nel punto P di concorrenza, è equivalente ad S.**
Infatti: dal Teorema di Varignon per S risulta $\mathbf{M}(P) = (P-P) \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0}$ e per S' risulta $\mathbf{M'}(P)=\mathbf{0}$
Quindi
$$\mathbf{R = R' \text{ e } M(P) = M'(P) = 0}$$

(Nota che questa proprietà di equivalenza si applica quando si scompone una forza applicata secondo le 2 componenti ortogonali, come accade nelle equazioni cardinali della statica per le travi in un piano)

c) **Il sistema S costituito da vettori applicati paralleli con $\mathbf{R \neq 0}$ è equivalente al proprio risultante applicato in un punto dell'asse centrale:**

Infatti: sia S = $(P_i , t_i \underline{\mathbf{u}})$ il sistema di vettori paralleli con direzione comune **u**,
$\mathbf{R} = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) \underline{\mathbf{u}} = t\underline{\mathbf{u}}$, con $t = \sum_{i=1}^{n} t_i$, il vettore risultante, come visto in precedenza. Per un punto O appartenete all'asse centrale risulta $\mathbf{M}(O) = \mathbf{M}_P = 0$ [in quanto $M_n(O) = 0$ per $O \in$ *asse* e $M_p = 0$ essendo $M(O) = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i = [\sum_{i=1}^{n} t_i (P_i - O)] \wedge \underline{\mathbf{u}}$ ortogonale ad R].

Sia S' = (O, R) , $O \in$ *asse centrale* **e** $\mathbf{R} = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right) \underline{u} = t\underline{u}$. Risulta $\mathbf{M}'(O) = 0$

Quindi si ha:

$$\mathbf{R = R' \text{ e } M(O) = M'(O) = O}$$

$c)_{bis}$ Con ragionamenti analoghi si ha che un sistema piano di vettori applicati con $R \neq 0$ è equivalente al proprio risultante applicato in un punto dell'asse centrale.

Come si verifica facilmente osservando che il vettore risultante giace nel piano dei vettori e che il momento risultante è ortogonale a tale piano (I=0).

Da notare che nei casi b) , c) e $c)_{bis}$ il sistema S è equivalente ad un unico vettore applicato in un punto dell'asse centrale.

NOTA 1 Nei casi in cui è $\mathbf{R} \neq 0$ e $\mathbf{M_p} \neq 0$, cioè invariante scalare non nullo, non è detto che il sistema S sia equivalente al sistema S' costituito da **R** applicato sull'asse centrale. Infatti per S risulta $\mathbf{M}(O) = \mathbf{M_p}$, con O un qualsiasi punto dell'asse centrale, mentre per S' risulta $\mathbf{M}(O)=\mathbf{0}$ rispetto agli stessi punti e quindi S ed S' **non sono equivalenti avendo momento diseguale** rispetto ai punti dell'asse.

Bisogna aggiungere una coppia di vettori, posta in un piano ortogonale ad R, che generi M_p e non alteri **R**. In questo caso esistono infinite coppie di vettori (A, **v**) , (B, **-v**) tali che

$$(A\text{-}B) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{M_p} \qquad (2.18)$$

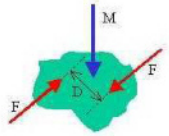
In quanto le (2.18) sono 3 equazioni scalari in 9 incognite fornite dalle coordinate di A, di B e le componenti di **v**. Possiamo scegliere a piacere le coordinate di A (∞^3 possibilità) , le coordinate di B apparterranno al piano passante per A e ortogonale a $\mathbf{M_p}$ (∞^2 possibilità) e dunque (A-B) parallelo ad **R**, per la (2.18).

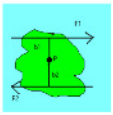
Se invece S ha R = 0 (non esiste l'asse centrale) ma $\mathbf{M}(O) \neq 0$ allora il sistema S' costituito da una sola coppia di momento M(O) è equivalente ad S $\forall$ polo O. Da notare che anche in questo caso l'invariante scalare è nullo.

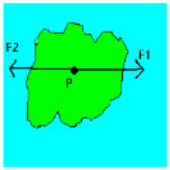
DEFINIZIONE 2: **Un sistema S di vettori applicati si dice *equilibrato* se ha risultante R = 0 e momento risultante M(O) = 0**

Esempio 2.3 Un semplice esempio di sistema equilibrato è una **coppia di braccio nullo**

Un corpo soggetto alla applicazione di due forze uguali e contrarie, aventi differenti rette d'azione, per raggiungere una posizione di equilibrio tenderà a ruotare fino a che le due forze non avranno la stessa retta d'azione.





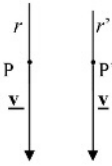


Esempio 2.4
Un altro esempio di sistema equilibrato è fornito da un **Sistema di vettori concorrenti in un punto e a risultante nullo (per Varignon)**

NOTA Si può passare da un sistema ad un altro equivalente attraverso 4 operazioni, dette ***elementari***, che non alterano né il risultante né il momento risultante:

1. aggiunta e soppressione di una coppia di braccio nullo
2. sostituzione di più vettori con il loro risultante applicato nel punto di concorrenza e viceversa

Esempio 2.5 Traslazione **trasversale** di un vettore **v** applicato in P, su una retta *r*, in uno **v** parallelo e applicato in un punto P' su una retta *r'* parallela ad *r* : S = (P,**v**) , S'=(P',**v**)

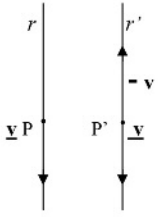


E' evidente che i due sistemi S e S' non sono equivalenti.

Non hanno lo stesso momento, ad esempio, rispetto a P. Quindi questa **traslazione fa nascere un momento.** Per ottenere l'equivalenza aggiungiamo una coppia di braccio nullo.

Nuovo sistema: S' =[(P,v)+ coppia (P', v), (P', -v)] **equivalente** a S =(P,**v**).

Ho così traslato il vettore (P,**v**) in (P', **v**)



2.4 Riepilogo sull'equivalenza

Sia $S = (P_i, \mathbf{v_i})$ un sistema di vettori applicati e **R** il relativo risultante, si presentano le seguenti possibilità di equivalenza:

$$\mathbf{R} = O \begin{cases} \mathbf{M}(O) = 0 & \text{Sistema S equilibrato} \\ \mathbf{M}(O) \neq 0 & \text{Sistema S equivalente ad una coppia} \end{cases}$$

$$\mathbf{R} \neq O \begin{cases} \mathbf{M_p} = \mathbf{0} \text{ Sistema S equivalente ad } \mathbf{R} \text{ applicato in un punto dell'asse centrale.} \\ \quad \text{Ad esempio nel caso di vettori concorrenti, paralleli, complanari} \\ \mathbf{M(O)} \neq \mathbf{0} \text{ Il sistema S si riduce a } \mathbf{R}, \text{ applicato in un punto O più una coppia di momento } \mathbf{M(O)}. \\ \quad \text{Se O appartiene all'asse centrale, e } \mathbf{M_p} \neq \mathbf{0} \textbf{ allora } S \text{ è equivalente ad un vettore} \\ \quad \text{applicato in un punto dell'asse centrale più una coppia posta in un piano} \\ \quad \text{ortogonale ad } \mathbf{R} \text{ e di momento } \mathbf{M_p} \end{cases}$$

Si verifica facilmente che condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di vettori applicati sia equivalente ad un solo vettore o ad una sola coppia è che si annulli il suo invariante scalare.

Esempio 2.6 Verifica dell'equivalenza tra sistemi di vettori I

Verificare che il sistema S di vettori applicati
$\underline{\mathbf{v}}_1 = \underline{\mathbf{i}}$ applicato in $P_1(0,0,1)$
$\underline{\mathbf{v}}_2 = \underline{\mathbf{j}}$ applicato in $P_2(1,0,0)$
$\underline{\mathbf{v}}_3 = \underline{\mathbf{k}}$ applicato in $P_3(0,1,0)$
è equivalente al sistema S'
$\underline{\mathbf{u}}_1 = \underline{\mathbf{i}}$ applicato in $Q_1(0, 0, -1)$
$\underline{\mathbf{u}}_2 = \underline{\mathbf{i}}$ applicato in $Q_2(0, -1, 0)$
$\underline{\mathbf{u}}_3 = \underline{\mathbf{k}}$ applicato in $Q_3(-1, 0, 0)$

Basta verificare che abbiano stesso risultante e stesso momento risultante rispetto ad un polo qualsiasi che per semplicità di calcoli scegliamo essere l'origine O(0,0,0).

Allora per il primo sistema risulta

$$\mathbf{R} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{M}(O) = \sum_{i=1}^{3} (P_i - O) \wedge v_i = k \wedge i + i \wedge j + j \wedge k = j + k + i$$

e per il secondo

$$\mathbf{R}' = \mathbf{j}+\mathbf{i}+\mathbf{k} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{M}'(O) = \sum_{i=1}^{3}(Q_i - O)\wedge u_i = -k\wedge \underline{j} - j\wedge i - i\wedge k = \underline{i}+k+j$$

e quindi i due sistemi risultano equivalenti

Esempio 2.7 Verifica dell'equivalenza tra sistemi di vettori II

Verificare che il sistema S di vettori
$v_1 = 4i + 3j + k \qquad v_2 = -4i - 3j - k$
applicati nel punto A(3,-1,2), è equilibrato.

Per il teorema di Varignon il sistema è equivalente al risultante **R** applicato in A, cioè
S'= [(A, R)], con M'(A) =0
Essendo R=0, dobbiamo solo verificare che M(A) = M'(A) = O
Ma M(A)=0 essendo il momento di una coppia di braccio nullo, come nell'Esempio 2.3.

Esempio 2.8 Calcolo equazione asse centrale e equivalenza.

Sia dato il sistema di vettori applicati S:

v_1 = 5j applicato in A_1 (0,2,0)

v_2 = -j +4k applicato in A_2 (0,9,0)

v_3 = -2i applicato in A_3 (2,0,0)

Determinare l'equazione dell'asse centrale e un sistema equivalente.

Riportiamo l'equazione dell'asse centrale (2.13)

$$(O'-O) = \frac{R\wedge M(O)}{R^2} + t\,\mathbf{R}\ ,\ O(0,0,0)$$

$\mathbf{R} = -2i+4j+4k$, $\mathbf{M}(O) = 2j\wedge 5j + 9j\wedge(-j+4k) + 2i\wedge -2i = 36i$

Quindi

$$(O'-O) = \frac{144(j+k)}{36} + t(-2i+4j+4k)$$

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 4+4t \\ z = 4+4t \end{cases} \qquad (2.19)$$

L'invariante scalare $\mathbf{I} = \mathbf{M(O)}\cdot\mathbf{R} = -72\neq 0$ quindi $\mathbf{M}_p = \frac{M\ O)R}{R^2}R = -2(-2i+4j+4k)$ e il sistema sarà equivalente al risultante **R** applicato in un punto dell'asse centrale, per esempio A(-2,8,8), con t=1 nelle (2.19), e ad una coppia di momento $\mathbf{M}_p$ che giace in un piano ortogonale ad $\mathbf{M}_p$.

Per determinare una coppia possiamo scegliere un altro polo B(x,y,z), le cui coordinate apparterranno al piano passante per A e ortogonale a $\mathbf{M}_p$ e considerare il sistema S' = [(A, R) , (A, v) , (B, -v)] con le coordinate di B soddisfacenti le due equazioni

$$(A\text{-}B)\cdot \mathbf{M}_p = 0 \;\; e \;\; (A-B)\wedge \mathbf{v} = \mathbf{M}_p \qquad (2.20)$$

Dalla prima delle (2.20) otteniamo

$$(-2\text{-}x)+(8\text{-}y)(-2)+(8\text{-}z)(-2) = 0 \qquad (2.21)$$

Da cui possiamo scegliere il punto B (0,0,17) corrispondente alla scelta x=0 e y=0 nella (2.21) delle due coordinate libere e quindi la seconda delle (2.20) fornisce

$$(A-B)\wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & +8 & -9 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(8v_z + 9v_y) - \mathbf{j}(-2v_z + 9v_x) + \mathbf{k}(-2v_y - 8v_x)$$

$$\begin{cases} 8v_z + 9v_y = +4 \\ 2v_z - 9v_x = -8 \\ -2v_y - 8v_x = -8 \end{cases} \qquad (2.22)$$

Risulta che il determinante della matrice dei coefficienti del sistema (2.22) è nullo:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 \\ -9 & 0 & 2 \\ -8 & -2 & 0 \end{pmatrix} = -9(+16) + 8(+18) = 0$$

Si verifica facilmente che il rango della matrice incompleta è uguale al rango della completa, entrambi uguali a 2. Esistono ∞^1 soluzioni. Scegliendo v_y come parametro libero possiamo avere ad esempio la soluzione $v_x = 1$, $v_y = 0$, $v_z = \frac{1}{2}$.

2.5 Centro di un sistema di vettori paralleli

I sistemi di vettori paralleli rivestono una particolare importanza nel caso in cui essi rappresentino un sistema di forze peso (relativamente ad una regione abbastanza ristretta dello spazio da poter considerare uniforme il campo della gravità e con direzione e verso comune paralleli alla verticale ascendente) come vedremo più avanti nel capitolo 7 sulla Geometria delle masse.

Sia $\mathbf{u}$ il versore della comune direzione e t_i , i=1, 2, …n, , gli scalari tali che i vettori $\mathbf{v_i} = t_i \mathbf{u}$ denotino gli n vettori paralleli applicati in P_i ; $t_i>0$ se $\mathbf{v_i}$ è equiverso a $\mathbf{u}$, $t_i<0$ in caso contrario.
Sarà:

$$\mathbf{R} = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right)\mathbf{u} = t\mathbf{u} \qquad \text{con } t = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

Se $\mathbf{R} \neq 0$ allora esiste l'asse centrale che, in questo caso, come abbiamo visto in precedenza, è il luogo dei punti O rispetto ai quali il momento $\mathbf{M_p} \equiv \mathbf{M}(O)$ si annulla:

$$\mathbf{M}(O) = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M(O)}_i = \left[\sum_{i=1}^{n} t_i (P_i - O) \right] \wedge \mathbf{u} = 0 \qquad (2.23)$$

Definiamo centro del sistema di vettori paralleli quel particolare punto P_0 che soddisfi la (2.23) **e** soddisfacente l'equazione

$$\sum_{i=1}^{n} t_i (P_i - P_0) = O \qquad (2.24)$$

indipendentemente, quindi, dalla direzione di $\mathbf{u}$.

NOTA che in questo caso **l'asse centrale passa per P_0 qualsiasi sia la direzione di u**, in corrispondenza di assegnati P_i e t_i .
Cioè, se facciamo ruotare il sistema di vettori paralleli di un qualsiasi angolo, l'asse centrale ruoterà dello stesso angolo ma il punto P_0 rimane fisso: l'asse centrale ruota intorno a P_0 .

Per determinare le coordinate P_o , riferiamoci ad un sistema di coordinate di origine O, dalla (2.24) si ha

$$\sum_{i=1}^{n} t_i (P_i - O + O - P_0) = O$$

e quindi la soluzione cercata è

$$P_0 - O = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} t_i (P_i - O) \qquad (2.25)$$

In coordinate

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{t} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \\ y_0 = \dfrac{1}{t} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i y_i \\ z_0 = \dfrac{1}{t} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i z_i \end{cases} \qquad (2.26)$$

Quando $\mathbf{R} \neq 0$, **il centro** del sistema di vettori paralleli **è unico**. Infatti supponiamo che esista un'altra soluzione P'_0 della (2.24)

$$\sum_{i=1}^{n} t_i (P_i - P'_0) = O \qquad (2.27)$$

Sottraiamo membro a membro, si ha

$$\sum_{i=1}^{n} t_i (P'_0 - P_0) = O \text{ e quindi } t(P_0 - P'_0) = 0$$

Ma essendo $t \neq 0$ segue $P_0 \equiv P'_0$ e quindi la soluzione è unica.

Per quanto visto precedentemente possiamo affermare che un sistema di vettori paralleli con $\mathbf{R} \neq 0$ è equivalente al proprio risultante **R** applicato nel **centro** P_0

Esempio 2.9 Centro di Massa

Consideriamo un sistema di punti materiali (P_i, m_i),cioè, punti dotati di massa, dove con $m_i > 0$ abbiamo indicato la massa del generico punto P_i, e consideriamo il caso in cui essi appartengano ad una regione abbastanza ristretta dello spazio in modo da poter considerare costante l'accelerazione di gravità $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ con **k** versore dell'asse z (verticale ascendente), avendo fissato una terna cartesiana Oxyz .

Le **forze peso** agenti sui punti P_i, $\mathbf{p_i} = -m_i g\, \mathbf{k}$, costituiscono un ***sistema di vettori paralleli e concordi*** con risultante

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} -m_i g\mathbf{k} = -Mg\mathbf{k} \quad \text{dove } M = \sum_{i=1}^{n} m_i \quad \text{massa totale del sistema}$$

e il cui **centro** è dato dalla relazione (2.25)

$$P_0 - O = \frac{1}{-Mg} \sum_{i=1}^{n} -m_i g (P_i - O) \qquad (2.28)$$

Semplificando per $-\mathbf{g}$ in (2.27) si ottiene il **centro** $\mathbf{P_0}$ **che in questo caso viene chiamato Baricentro o Centro di Massa.**

$$M(P_0 - O) = \sum_{i=1}^{n} m_i (P_i - O) \qquad (2.29)$$

Per le proprietà di Equivalenza dei Sistemi di Vettori Applicati Paralleli con $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$, il Baricentro è dunque quel **punto dell'asse centrale dove và applicato il vettore risultante R = -Mg k (forza peso totale)** del sistema affinché il sistema delle forze peso $S = \{(P_i, -m_i g\mathbf{k}\}$ sia ad esso equivalente.

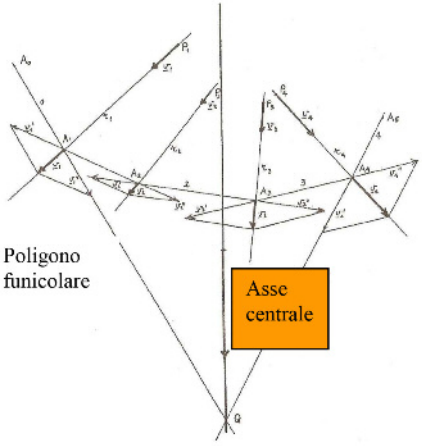
2.6 Cenni sul Poligono Funicolare. Determinazione grafica dell'asse centrale per un sistema piano di vettori

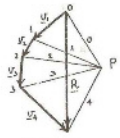
Il poligono funicolare è un metodo grafico che consente di determinare l'asse centrale di un **sistema piano di vettori applicati.** In questo modo si potrà ridurre il sistema ad uno ad esso equivalente costituito da un solo vettore, il risultante, applicato in un punto di tale asse.

Il procedimento si applica ad un qualsiasi sistema di *n* vettori complanari. Qui, per semplicità ci riferiamo ad un sistema di soli 4 vettori, $(P_i, \mathbf{v}_i)$, $i = 1,2,..4$ con $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$. Dapprima si costruisce il **poligono delle forze,** che è una spezzata i cui i lati (1-O), (2-1), (3-2) e (4-3) sono rappresentativi dei 4 vettori. Il lato di chiusura (4-O) rappresenta la loro somma, cioè, rappresenta $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{v}_i$

Nota che, essendo 4≠O, il poligono è aperto, $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$.
Da un generico punto P del piano tracciamo le congiungenti i punti O,1,2,3,4 ottenendo i segmenti OP, 1P, 2P, 3P, 4P, detti **raggi proiettanti.**

Da un generico punto A_0 del piano costruiamo una spezzata con i lati paralleli ai raggi proiettanti e che intersecano le rette d'azione dei vettori nei punti A_1, A_2, A_3 e A_4




Poligono delle forze

Questa spezzata prende il nome di Poligono Funicolare e se, come in questo caso, il primo lato è distinto dall'ultimo, si dice che il poligono funicolare è aperto (altrimenti chiuso).
Inoltre, sempre relativamente al nostro caso, il primo e ultimo lato non possono essere paralleli in quanto il primo e ultimo raggio proiettante non coincidono essendo il poligono delle forze aperto.
NOTA L'origine dell'aggettivo *funicolare* discende dal fatto che la configurazione della poligonale è simile a quella di equilibrio di una fune fissata in A_0, appartenente al primo lato, e in A_5, appartenente all'ultimo lato del poligono funicolare, e soggetta nei punti A_1, A_2, A_3 e A_4 alle forze $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$, $\mathbf{v_4}$

Dimostriamo che il punto di intersezione Q, del primo e dell'ultimo lato del poligono funicolare, è un punto dell'asse centrale. L'asse verrà quindi individuato tracciando per Q la retta parallela a **R** e cioè al lato di chiusura del poligono delle forze.

Eseguiamo delle operazioni elementari per mantenere l'equivalenza tra i successivi sistemi:

a) trasliamo i 4 vettori lungo le loro rette d'azione fino ad applicarli nei punti A_i , i=1,2,3,4
Il nuovo sistema $(A_i, \mathbf{v_i})$ è equivalente al vecchio $(P_i , \mathbf{v_i})$

b) scomponiamo i vettori lungo le direzioni dei raggi proiettanti:
$\mathbf{v}_1 = 1\text{-}0 = 1\text{-}P + P\text{-}0 = \mathbf{v'}_1 + \mathbf{v''_1}$; $\mathbf{v}_2 = 2\text{-}1 = 2\text{-}P + P\text{-}1 \equiv \mathbf{v'_2} - \mathbf{v'}_1$
$\mathbf{v}_3 = 3\text{-}2 = 3\text{-}P + P\text{-}2 \equiv \mathbf{v'}_3 - \mathbf{v'_2}$; $\mathbf{v}_4 = 4\text{-}3 = 4\text{-}P + P\text{-}3 \equiv \mathbf{v'}_4 - \mathbf{v'_3}$
Il sistema così ottenuto è a sua volta equivalente al precedente.

c) osserviamo che sopprimendo le coppie di braccio nullo
$(A_1, \mathbf{v'}_1)\,(A_2, -\mathbf{v'}_1)$, $(A_2, \mathbf{v'}_2)\,(A_3, -\mathbf{v'}_2)$, $(A_3, \mathbf{v'}_3)\,(A_4, -\mathbf{v'}_3)$
otteniamo un altro sistema equivalente composto dai soli vettori $(A_1, \mathbf{v''}_1)$ e $(A_4 , \mathbf{v'}_4)$ le cui rette d'azione sono, rispettivamente, il primo e l'ultimo lato del poligono funicolare che si incontrano nel punto Q.

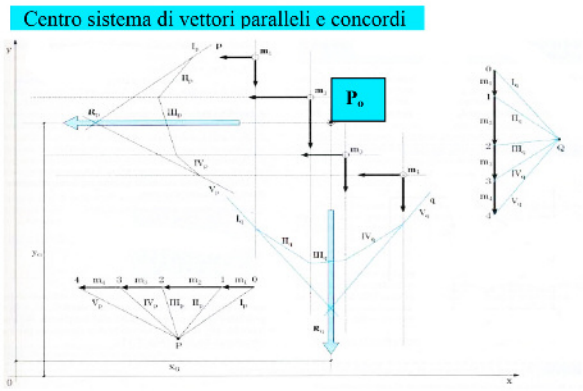
d) i due vettori hanno momento nullo rispetto a Q perché concorrono in Q **e quindi Q è un punto dell'asse centrale. La retta per Q e parallela a R , e quindi parallela al lato di chiusura del poligono delle forze, è l'asse centrale del sistema di vettori** $(P_i , \mathbf{v_i})$, i = 1,2,..4 .

Nota che sul lato A_1A_2 della spezzata agisce la coppia di vettori 1-P e P-1 e perciò possiamo dire che su questo tratto di fune agisce una tensione pari al modulo di questi vettori. Analogamente per gli altri tratti . Quindi i raggi proiettanti danno la tensione sui corrispondenti tratti del poligono funicolare.
Si nota inoltre che poiché A_0 e P sono arbitrari, vi sono ∞^3 possibili poligoni funicolari relativi ad un sistema piano di vettori: ∞^2 scelte per P e ∞^1 scelte del primo lato in un fascio di rette parallele al primo raggio proiettante. Facendo opportune scelte si possono costruire particolari Poligoni Funicolari detti Condizionati.

OSSERVIAMO che se il poligono delle forze è **chiuso, R=0,** il primo e l'ultimo raggio proiettante coincidono e quindi i primo e l'ultimo lato del poligono funicolare sono **paralleli o coincidenti.**
Se sono coincidenti la coppia risultante ha braccio nullo e il sistema è equilibrato.
Se sono paralleli il sistema sarà equivalente ad una coppia di vettori agenti su queste due direzioni parallele con momento $\neq 0$.
Quindi, le condizioni grafiche affinché un sistema di vettori (forze) nel piano sia equilibrato sono che il poligono delle forze e il poligono funicolare siano entrambi chiusi.

Esempio 2.10 Determinazione grafica del centro di un sistema di vettori paralleli e concordi

Per la proprietà del centro di essere indipendente dalla direzione comune dei vettori è sufficiente, per la sua determinazione grafica, determinare gli assi centrali relativi a due direzioni diverse ottenute facendo ruotare i vettori di uno stesso angolo, nell'esempio sotto riportato l'angolo è $\frac{\pi}{2}$. Il centro, punto $\mathbf{P_o}$ in figura, si troverà quindi nel punto di intersezione dei due assi.



Esempio 2.11 Calcolo analitico del centro di un sistema di vettori paralleli

Sia $S = \{(P_1, v_1);\ (P_2, v_2)\}$ un sistema piano di vettori applicati paralleli e concordi con:

$$P_1(2,-1)\ ,\ P_2(-1,2) \qquad \mathbf{v_1} = -3\mathbf{i}+2\mathbf{j}\ ,\quad \mathbf{v_2} = -6\mathbf{i}+4\mathbf{j} = 2\,\mathbf{v_1}$$

Determiniamo il centro P_0 con l'uso della definizione (2.26)

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{t}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \\ y_0 = \dfrac{1}{t}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i y_i \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo determinare il versore comune $\mathbf{u}$ e gli scalari t_i.

Dalla $(1.25)_a$ del Capitolo1 si ha:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v_1}}{|\mathbf{v_1}|} = \frac{\mathbf{v_1}}{\sqrt{9+4}} = \frac{\mathbf{v_1}}{\sqrt{13}}\ ,\ u_x = -\frac{3}{\sqrt{13}}\quad ,\ u_y = \frac{2}{\sqrt{13}}\ ;\ \mathbf{u} = -\frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{j} \qquad (2.30)$$

e quindi

$\mathbf{v_1} = \sqrt{13}\,\mathbf{u}$ e $\mathbf{v_2} = 2\cdot\sqrt{13}\,\mathbf{u}$, cioè $t_1 = \sqrt{13}$ e $t_2 = 2\cdot\sqrt{13}$, $t = t_1 + t_2 = 3\sqrt{13}$,

e il risultante è $\mathbf{R} = t\,\mathbf{u} = 3\sqrt{13}\,\mathbf{u} = -9\,\mathbf{i} + 6$

Sarà dunque:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{3\sqrt{13}}\left[(2\sqrt{13}) + (-1)\,2\sqrt{13}\right] = 0 \\ y_0 = \dfrac{1}{3\sqrt{13}}\left[\sqrt{13}\,(-1) + 2\cdot 2\sqrt{13}\right] = 1 \\ z_0 = 0 \end{cases} \qquad (2.31)$$

Cioè $P_0\,(0,1)$ è il centro del sistema S.

Verifichiamolo ruotando il sistema S di un angolo di $\dfrac{\pi}{4}$ e calcolando P_0 come punto di intersezione degli assi centrali relativi ad S e al sistema ruotato S' (P_0 non varia al ruotare dell'asse centrale).

Utilizziamo la notazione matriciale (1.10) e (1.11) del Capitolo1 per ruotare i vettori di S:

$$\begin{pmatrix} v_1{}'_x \\ v_1{}'_y \end{pmatrix} = A_\alpha \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha \\ \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{4} & -\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{4} \\ \mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Le componenti del vettore $\mathbf{v}_1$' ruotato sono:

$$\begin{cases} v_1{}'_x = -3\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -5\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ v_1{}'_y = -3\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \mathbf{v}_1' = -5\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{j} \qquad (2.32)$$

Analogamente risulta :

$$\mathbf{v}'_2 = -5\sqrt{2}\,\mathrm{i} - \sqrt{2}\,\mathrm{j}$$

L'equazione dell'asse centrale relativo al sistema S si ottiene osservando che il momento risultante rispetto ad un punto Q(x,y) di tale asse, $\mathbf{M(Q)} \equiv \mathbf{M_p}$, è nullo in quanto ortogonale ad esso (Invariante scalare nullo).

Quindi

$$\mathbf{M}(Q) = (P_1 - Q) \wedge \mathbf{v}_1 + (P_2 - Q) \wedge \mathbf{v}_2 = [(2-x)\mathbf{i} - (1+y)\mathbf{j}] \wedge (-3\mathbf{i}+2\mathbf{j}) + [-(1+x)\mathbf{i} + (2-y)\mathbf{j}] \wedge (-6\mathbf{i}+4\mathbf{j}) = 0$$

Da cui si ottiene

$$-6x-9y+9 = 0 \qquad (2.33)$$

Analogamente per il sistema ruotato S' si ha

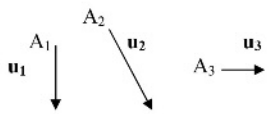
$$\mathbf{M'}(Q) = (P_1 - Q) \wedge \mathbf{v'}_1 + (P_2 - Q) \wedge \mathbf{v'}_2 = \mathbf{0}$$

$$3x - 15y + 15 = 0 \qquad (2.34)$$

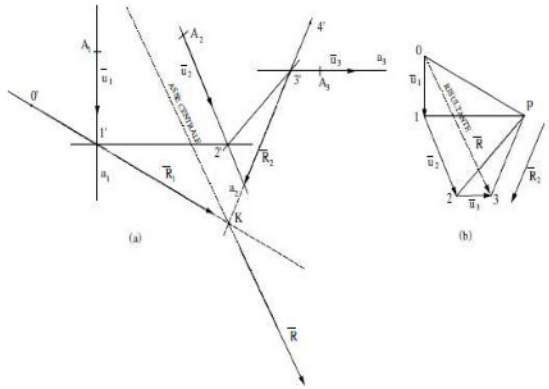
Si verifica facilmente che l'unica soluzione del sistema (2.33) + (2.34) è x=0 e y=1 e quindi abbiamo verificato che il centro del sistema di vettori S è l'unico punto $P_0(0,1)$ appartenente all'asse centrale che rimane invariato al ruotare del sistema di vettori, e quindi dell'asse centrale, di uno stesso angolo.

Esempio 2.12

Ridurre graficamente , mediante l'uso del poligono funicolare e delle operazioni elementari, il sistema piano dei 3 vettori applicati $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, con risultante $\neq 0$, ad un unico vettore.



Troviamo l'asse centrale del sistema, come indicato nel paragrafo 3.3:



Essendo il sistema piano, l'invariante scalare è nullo e quindi il momento risultante rispetto ai punti di tale asse è nullo. Il sistema dei 3 vettori è quindi equivalente al sistema costituito da un solo vettore: il risultante applicato in un punto dell'asse centrale.

3. REAZIONI VINCOLARI. EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

Partendo dal confronto tra il moto di un punto materiale libero (Leggi di Newton) e quello di uno vincolato, viene introdotto il concetto di Reazione Vincolare. L'estensione di questo concetto a sistemi di più punti materiali sottoposti sia a *Forze Attive* che a *Reazioni Vincolari* porta al problema dell'equilibrio regolato dalle Equazioni Cardinali della Statica la cui esistenza viene qui giustificata ma non dimostrata rigorosamente. Fondamentale per l'analisi della staticità di un sistema è il concetto di *grado di libertà*. Per i corpi rigidi, quelli per i quali le distanze tra i punti non variano nel tempo, si dimostra che nello spazio e in assenza di vincoli esterni, i gradi di libertà sono 6. Viene analizzata la staticità di un particolare corpo rigido piano, denominato ***trave,*** sottoposto all'azione di vincoli esterni e se ne calcola analiticamente il valore delle reazioni esplicate da essi affinché stia in equilibrio sotto l'azione di un sistema di forze attive applicate. Il caso dell'equilibrio di un sistema composto da due corpi rigidi vincolati tra loro e all'esterno, il cosiddetto Arco a 3 Cerniere, viene anche considerato.

3.1 Richiami sulla dinamica di un punto materiale libero

Senza soffermarci sui concetti, noti dai corsi di Fisica, di forza, tempo, massa, né di sistema di riferimento inerziale, ricordiamo che alla base della dinamica dei sistemi materiali ci sono le tre leggi della Meccanica Newtoniana:

I legge (*d'inerzia*) Ogni corpo non soggetto a forze esterne permane in uno stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

II legge (*fondamentale*) $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ La forza $\mathbf{F}$ applicata su un corpo di massa m genera una accelerazione $\mathbf{a}$ proporzionale alla forza stessa.
Se P(x(t),y(t),z(t)) è un punto materiale di massa m, t è la variabile tempo, si ha la ben nota equazione:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (3.1)$$

dove

$\mathbf{a}(x,y,z) = \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} + \ddot{z}\,\mathbf{k}$ **è la rappresentazione cartesiana del vettore accelerazione** e dove abbiamo denotato con il punto l'operazione di derivazione rispetto al tempo.

III legge (*di azione e reazione*) Ad ogni azione $\mathbf{F}_{AB}$ esercitata dal corpo A sul corpo B corrisponde una reazione uguale e contraria $\mathbf{F}_{BA} = -\mathbf{F}_{AB}$ dal corpo B sul corpo A aventi entrambe la stessa retta d'azione (coppia di forze di braccio nullo).

Esempi della II legge.

Esempio 3.1 Nota la forza determinare il moto
Si consideri il caso in cui sul punto agisca solo la forza di gravità

$$\mathbf{F} = -mg\,\mathbf{j} \qquad (3.2)$$

con g accelerazione di gravità costante, $g \approx 9{,}8\ m/s^2$, diretta lungo l'asse y. Il problema (3.1) diventa

$$-mg\,\mathbf{j} = m\mathbf{a}$$

in componenti è dunque:

$$\begin{cases} -mg = m\ddot{y} \\ 0 = m\ddot{x} \\ 0 = m\ddot{z} \end{cases} \qquad (3.3)$$

Dalla prima si ha

$$\ddot{y} = -g$$

che si risolve immediatamente con due integrazioni successive fornendo

$$y(t) = a + bt - 1/2\ gt^2$$

ove $a, b \in R$ sono da determinare assegnando le **condizioni iniziali** (Problema di Cauchy per un equazione differenziale del II ordine).

Se ad esempio richiediamo che inizialmente il punto si trovi sull'asse y alla quota y_0

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ x(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases} \quad \textbf{posizione iniziale}$$

con velocità v_0 sull'asse y

$$\begin{cases} \dot{y}(0) = v_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{z}(0) = 0 \end{cases} \quad \textbf{velocità iniziale}$$

La soluzione è dunque:

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_0\,t - 1/2\ gt^2 \\ x(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

che rappresenta una caduta libera, espressione tipica del moto uniformemente accelerato, lungo l'asse y.
Da notare ora, ma riprenderemo questo concetto nel seguito, che per poter risolvere una equazione vettoriale, come ad esempio la (3.1), **bisogna passare alla sua proiezione sugli assi cartesiani fissati** (nell'esempio, le (3.3)) **e studiare quindi le equazioni scalari corrispondenti.**

Esempio 2.2 Determinare la forza agente sul punto P una volta nota la traiettoria

Se è nota la traiettoria del punto, cioè è nota la sua posizione istante per istante, ad esempio,

$$x(t) = t^3 \ , \ y(t) = 3t + 1, \quad z(t) = 0$$

Per conoscere **F** , dalla (3.1) devo determinare l'accelerazione **a:**

derivando rispetto al tempo una prima volta si ha

$$\dot{x}(t) = 3t^2 \ , \quad \dot{y}(t) = 3 \ , \quad \dot{z}(t) = 0 \ \Rightarrow \text{la velocità } \mathbf{v} = 3t^2\mathbf{i} + \mathbf{3j}$$

Derivando una seconda volta il problema è risolto.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} \cdot + \ddot{z}\mathbf{k} \ \Rightarrow \mathbf{a} = 6t\mathbf{i} \Rightarrow \mathbf{F} = 6mt\mathbf{i}, \text{ forza agente cercata.}$$

3.2 Moto di un punto vincolato. Vincoli olonomi unilateri e bilateri

Si vuole studiare il moto di un punto **non più libero** ma vincolato a spostarsi su una linea o una superficie sotto l'azione di una forza assegnata. Introduciamo il concetto di **vincolo**, limitandoci al caso di un punto, utilizzando un formalismo che sarà facilmente generalizzabile alla dinamica di un sistema di punti.
Assegnare una configurazione significa assegnare la posizione del punto P nello spazio fisico R^3. Il punto si dice **libero** se non si impongono limitazioni ai valori che le coordinate di P possono assumere durante il moto. La posizione assunta durante il suo movimento è nota conoscendo istante per istante le sue tre coordinate cartesiane (x(t),y(t),z(t)) che variano indipendentemente rispetto ad un assegnato sistema di riferimento, ecco perché si dice che un punto libero nello spazio ha **3 gradi di libertà.**
Il punto si dice vincolato nel caso invece che si impongano limitazioni alle sue coordinate.
Con riferimento ad un sistema di riferimento cartesiano Oxyz, si chiama **vincolo semplice** una limitazione alle coordinate di P data dalla relazione:

$$f(x,y,z)=0 \qquad (3.4)$$

detta **relazione (equazione) vincolare (del vincolo)** che descrive la superficie su cui il punto è vincolato a muoversi.

Esempio 3.3 Punto vincolato su superficie sferica

Sia $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ l'equazione del vincolo che indica la superficie sferica di raggio r = 3 su cui il punto è vincolato a muoversi.

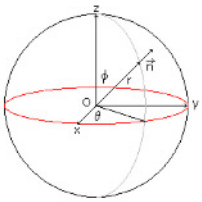


Fig. 3.1 Punto vincolato a muoversi su una sfera

E' evidente che in questo caso i gradi di libertà si riducono a 2 in quanto le tre coordinate non sono più libere di variare ad arbitrio ma devono obbedire all'equazione della superficie sferica (**3 gradi di libertà – 1 relazione vincolare = 2 gradi di libertà**) ed infatti, noto il raggio, **usando le coordinate sferiche**, è sufficiente conoscere gli angoli θ e φ, azimut e inclinazione, per individuare la posizione di P.

Quindi risulta

$$\begin{aligned} x &= x(\theta, \varphi) \\ y &= y(\theta, \varphi) \\ z &= z(\theta, \varphi) \end{aligned} \qquad (3.5)$$

[l'Analisi insegna che questo equivale ad aver applicato il Teorema del Dini sulle funzioni implicite che consente, sotto opportune ipotesi, di poter esplicitare le tre variabili in funzione di due.]

Si chiama invece **vincolo doppio** una limitazione alle coordinate di P date dal sistema di 2 equazioni indipendenti

$$\begin{aligned} f_1(x; y; z) &= 0; \\ f_2(x; y; z) &= 0; \end{aligned} \qquad (3.6)$$

In questo caso i gradi di libertà scendono da 3 ad 1 (3 gradi di libertà - 2 relazioni indipendenti = 1 grado di libertà).

Esempio 3.4 Vincolo doppio

Siano

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

le equazioni di due piani indipendenti la cui intersezione è l'asse x su cui il punto è vincolato a muoversi. Basta quindi conoscere solo la sua coordinata x per individuarne la posizione.

E quindi risulta

$$x = x$$
$$y = y(x)$$
$$z = z(x)$$

ho esplicitato le altre 2 variabili y e z in funzione della sola x che è l'unico parametro utile per descrivere il moto in questo caso di un solo grado di libertà.

Si chiama **vincolo triplo** una limitazione alle coordinate di P data dal sistema di 3 equazioni indipendenti

$$\begin{aligned} f_1(x; y; z) &= 0; \\ f_2(x; y; z) &= 0; \\ f_3(x; y; z) &= 0; \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Esempio 3.5 Vincolo Triplo

Consideriamo le seguenti equazioni relative ai tre piani cartesiani:

$x=0$ piano yz
$y=0$ piano xz
$z=0$ piano xy

L'intersezione di questi tre piani indipendenti è costituita da un solo punto che è l'origine O(0,0,0) del sistema di riferimento. Quindi la posizione del punto P è fissata nell'origine: non ha più alcuna possibilità di movimento. Infatti i gradi di libertà si sono ridotti a zero (3 gradi di libertà – 3 relazioni vincolari indipendenti = 0 gradi di libertà).

NOTA: Le posizioni del punto P che **non** soddisfano le relazioni vincolari appartengono **a *zone proibite***. Nei nostri 3 esempi esse corrispondono a: 1) punti esterni e interni alla sfera, 2) punti non appartenenti all'asse x, 3) punti diversi dall'origine del sistema di riferimento (tutto lo spazio tranne O(0,0,0))

I vincoli possono anche dipendere dal **tempo,** in tal caso la relazione assume la forma

$$f(x,y,z,t)=0 \qquad (3.8)$$

Le relazioni vincolari viste fino ad ora sono espresse da uguaglianze e in tal caso parliamo di vincolo **bilatero** in quanto, dato un qualsiasi spostamento compatibile con il vincolo, anche il suo opposto risulterà compatibile. Ma possiamo avere anche relazioni espresse da disuguaglianze

$$f(x,y,z) \geq 0 \text{ (o anche } f(x,y,z) \leq 0) \qquad (3.9)$$

e in tal caso parleremo di vincolo **unilatero**.

Esempio di Vincolo unilatero

Ad esempio, in due dimensioni, la relazione

$$x^2 + y^2 \geq R^2$$

vincola il punto a non penetrare all'interno del cerchio di raggio R. In tal caso parliamo di vincolo **unilatero** e la posizione Q sulla circonferenza $x^2 + y^2 = R^2$ (frontiera del cerchio) si chiama posizione di **confine**.

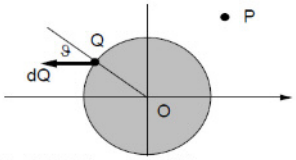


Fig. 3.2 Vincolo unilatero

Poiché nel piano un punto libero ha 2 gradi di libertà, questo vincolo riduce di uno tali gradi di libertà e infatti la sua posizione è individuata univocamente dall'angolo ϑ della Figura 3.2

$$x = x(\vartheta)$$
$$y = y(\vartheta)$$

In generale le **posizioni** corrispondenti al segno di disuguaglianza stretto vengono dette **ordinarie** (ad esempio il punto P nella figura) , quelle corrispondenti al segno di uguale vengono dette di **confine** (ad esempio il punto Q)
Se il raggio del cerchio è variabile nel tempo, R(t), abbiamo un esempio di vincolo unilatero e dipendente dal tempo , $f(x,y;t) \geq 0$

Diremo **olonomo** un vincolo fra le **coordinate** del punto caratterizzabile mediante equazioni e/o disequazioni (**anolonomo** se il vincolo limita anche velocità e/o accelerazione).

I vincoli degli Esempi 3.3, 3.4, 3.5 sono quindi vincoli olonomi, fissi e bilateri.
Torneremo ancora nel seguito alla caratterizzazione dei vincoli. In generale useremo il termine " vincoli" per indicare i dispositivi che limitano tutte, o solo alcune, fra le possibilità di movimento del sistema considerato

Se quindi vogliamo studiare il moto di un punto materiale vincolato e soggetto ad una forza nota **F**, le sue coordinate dovranno soddisfare, istante per istante, oltre che all'equazione fondamentale della dinamica anche alle relazioni vincolari.

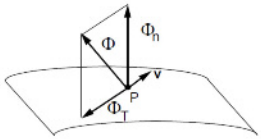
E' evidente che se ci limitiamo all' azione della sola forza direttamente applicata **F,** la traiettoria del punto non potrà soddisfare l'equazione vincolare. Ciò sarà possibile solo se si terrà conto dell'azione del vincolo mediante l'introduzione di una opportuna forza $\boldsymbol{\Phi}$, detta **reazione vincolare**. Cioè, **immaginiamo di togliere il vincolo e sostituiamolo con l'azione esercitata dalla forza** Φ che costringe il punto a muoversi assumendo posizioni compatibili con il vincolo e cioè impedendogli di andare verso le *zone proibite*. In tal modo il moto del punto vincolato potrà essere studiato come il moto un punto *libero* soggetto all'azione delle due forze **F** e $\boldsymbol{\Phi}$

$$\mathbf{ma} = \mathbf{F} + \boldsymbol{\Phi} \qquad (3.10)$$

3.3 Vincolo Liscio. Reazione Vincolare

Scomponiamo la reazione vincolare in due componenti, uno normale $\boldsymbol{\Phi}_n$ e l'altro $\boldsymbol{\Phi}_T$ tangente alla superficie del vincolo nel punto P: chiamiamo **attrito** il componente della reazione vincolare sul **piano tangente** alla superficie del vincolo e diretto in verso opposto allo spostamento del punto P.

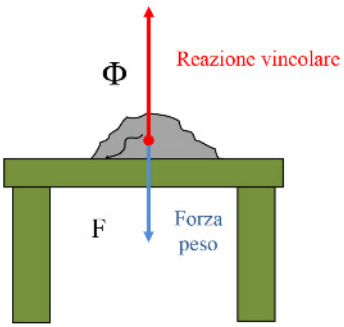
La superficie vincolare si dice **priva di attrito** quando $\Phi_T = 0$ **, cioè** la reazione vincolare è sempre normale alla superficie del vincolo e diretta verso la zona accessibile del vincolo. In tal caso parleremo di **vincolo liscio**.



In questa sede non ci soffermiamo sulle definizioni e proprietà legate all'attrito che rimandiamo ad altri Testi.
E' però utile per il seguito osservare che, dall'esperienza, l'attrito dissipa energia, cioè l'energia meccanica non si conserva. In questo caso, infatti, il **lavoro** compiuto dalla forza d'attrito è sempre **negativo** a causa del fatto che tale forza è sempre di segno opposto allo spostamento. Quindi le forze di attrito, opponendosi al moto, diminuiscono l'energia cinetica dei corpi.
Un vincolo privo di attrito, invece, non dissipa energia.

Esempio 3.6 Equilibrio tra Reazione Vincolare e Forza Applicata

Consideriamo, invece di un punto materiale, un oggetto esteso pesante poggiato su un tavolo.



Il tavolo (vincolo) impedisce all'oggetto pesante poggiato su di esso di compiere traslazioni verso il basso per effetto della gravità.

Come visto nell'esempio 2.9 del capitolo 2 paragrafo 3.4, la forza peso **F** è applicata nel Centro di Massa dell'oggetto . Le sue unità di misura sono Kilogrammi x 9,8metri /secondi^2 = Newton**.**

Es: il peso di una massa di 4 Kg. è di 39,2 Newton

Il tavolo (vincolo) impedisce la traslazione verso il basso. Possiamo quindi immaginare di toglierlo e sostituire al suo posto la **reazione vincolare** Φ che, essendo l'oggetto in equilibrio in questa posizione, deve bilanciare il peso dell'oggetto **F**, unica forza attiva presente.
Dalla (3.10), poiché all'equilibrio risulta **a = 0,** avremo**:**

$$\mathbf{F} + \Phi = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{F} = -\Phi$$

All'equilibrio la somma della forza attiva e della reazione vincolare è nulla, la reazione vincolare bilancia la forza attiva.

3.4 Richiami sulla Dinamica di un Sistema di Punti Materiali

Estendiamo i concetti e le definizioni viste per un punto materiale al caso di un sistema S di punti materiali che verranno indicati con P_i , i = 1, 2,… n, ciascuno di massa m_i .
Consideriamo un sistema di N punti materiali Pi (i = 1, 2, ...,N), di massa m_i; indichiamo con $\mathbf{F}_i$ le forze attive e con $\mathbf{\Phi}_i$ le reazioni vincolari applicate ai punti Pi.
Tra le forze attive annoveriamo sia le forze **interne** esercitate su P_i da punti P_j , $j \neq i$, del sistema stesso che le **forze** esterne provenienti dall'azione di punti che non appartengono al sistema (p.e. la forza peso).
Dalla III Legge della Dinamica (azione e reazione) si evince che il sistema delle forze interne è equilibrato in quanto costituito da coppie di braccio nullo.

Consideriamo ora il sistema di punti materiali S mobili con velocità $\mathbf{v}_i$, accelerazione $\mathbf{a}_i$, e sottoposto a delle forze attive $\mathbf{F}_i$ e da quelle vincolari Φ_i .
Per ciascun punto potremo allora scrivere l'equazione della dinamica nella forma

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i = m_i \mathbf{a}_i \qquad (3.11)$$

Se sommiamo tutte le equazioni (3.11) e teniamo conto che le forze interne eventualmente presenti sono coppie di braccio nullo, per cui si elidono a vicenda, si ottiene

$$\mathbf{R}^e = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i \qquad (3.12)$$

Dove con $\mathbf{R}^e$ abbiamo indicato il risultante delle forze esterne (attive + vincolari).
Detto poi O un punto qualunque dello spazio, se si moltiplica vettorialmente ciascuna delle (3.6) per il vettore $(P_i - O)$ e si somma membro a membro si ottiene, tenendo conto che le forze interne essendo coppie di braccio nullo non contribuiscono al momento risultante M(O):

$$M(O) = \sum_i (P_i - 0) \wedge (\mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i) = \sum_i \mathbf{M}_i(0) = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge m_i \mathbf{a}_i \qquad (3.13)$$

Le equazioni (3.12) e (3.13) sono le Equazioni Cardinali della Dinamica per un sistema di n punti materiali corrispondenti a 2 equazioni vettoriali indipendenti e cioè a 6 equazioni scalari. Le incognite sono le 3n coordinate $x_i(t)$ di posizione dei punti P_i e le 3n componenti delle reazioni vincolari $\Phi_i(t)$, in totale 6n incognite contro le sole 6 equazioni scalari. **Quindi le Equazioni Cardinali della Dinamica sono necessarie ma in generale non sono sufficienti** a determinare il moto di un sistema o a garantirne l'equilibrio.
Le equazioni cardinali della dinamica diventano **anche sufficienti** per la determinazione del moto dei punti, a partire da fissate condizioni iniziali, solo quando le coordinate per individuare la posizione del sistema siano **al più 6.**
Si rimanda ad un testo completo di Meccanica Razionale per un approfondimento sulle Equazioni Cardinali della Dinamica.

3.5 Richiami sulla Statica dei Sistemi.

Se un punto P si trova in quiete rispetto a un sistema di riferimento, l'equazione (3.10) si riduce a

$$\mathbf{F} + \mathbf{\Phi} = \mathbf{0} \qquad (3.14)$$

poiché all'equilibrio risulta $\mathbf{a = 0}$ (vedi Esempio 3.6).

Si dice allora che P è in posizione di equilibrio. Se viceversa P si trova in una posizione dove è verificata la (3.14) ed ha velocità nulla, allora si dice che P è in quiete in quella posizione. Se per tutti i punti materiali P_i del sistema S vale la (3.14), si ottengono le equazioni:

$$\mathbf{R}^e = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i = 0 \qquad (3.15)$$

$$\mathbf{M}(0) = \sum_i (P_i - 0) \wedge (\mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i) = \sum_i (P_i - 0) \wedge m_i \mathbf{a}_i = 0 \qquad (3.16)$$

dette **Equazioni Cardinali della Statica valide per un sistema di punti materiali all'equilibrio.**

Si noti che la (3.16), se è valida per un polo O, è valida per ogni altro polo O a causa di (3.15), come verificato usando la Legge di Variazione del Momento nel Paragrafo 2.1 del Cap. 2 .
Le (3.15) e (3.16) ci dicono che per un sistema all'equilibrio il sistema delle forze esterne (forze attive e reazioni vincolari) agenti su di esso deve essere equivalente a zero (equilibrato), vedi Definizione 2.3, nel Cap. 2.
Come per il caso dinamico, tali equazioni corrispondono a 6 equazioni scalari e non sono quindi sufficienti a determinare la posizione di equilibrio del sistema . Si pensi a una massa di gas compressa e poi lasciata libera: le forze esterne diventano nulle, le forze interne (di repulsione) costituiscono coppie di braccio nullo e quindi le Equazioni Cardinali della Statica sono verificate, ma le particelle di gas non restano in quiete sotto l'azione delle forze interne pur essendo queste equilibrate, infatti il gas si espande. Le equazioni cardinali della statica diventano **anche sufficienti** per la determinazione della posizione di equilibrio del sistema solo quando le coordinate per

individuare la posizione del sistema siano **al più 6.** Vedremo nel prossimo paragrafo che ciò accade per particolari sistemi detti rigidi.
Si rimanda ad un testo completo di Meccanica Razionale per un approfondimento sulle Equazioni Cardinali della Statica.

3.6 Sistemi Materiali Rigidi: 6 Gradi di libertà

Abbiamo già detto che il moto di una sistema di punti P_i $i = 1,\ldots,n$, rispetto ad una prefissata terna cartesiana di riferimento, resta determinato dal moto dei singoli punti. La posizione istantanea dei punti determina la *configurazione istantanea* del sistema mentre il complesso delle velocità istantanee dei punti ne caratterizza *l'atto di moto*. Poiché ogni punto nello spazio è individuato da 3 coordinate occorrono 3n funzioni del tempo per individuare la configurazione istantanea del sistema.
Si dice quindi che un sistema di **n** punti libero di muoversi nello spazio ha **3n gradi di libertà**
Fortunatamente, come accade nella maggior parte dei casi, esistono delle relazioni vincolari (vedi paragrafo 3.2) tra i punti che fanno invece dipendere la sua configurazione, e l' atto di moto, soltanto da un gruppo di essi o da opportuni parametri indipendenti, sufficienti alla determinazione del moto, riducendo quindi il *grado di libertà* del sistema.
Se k è il numero di relazioni vincolari linearmente indipendenti a cui devono soddisfare le 3n coordinate allora i 3n gradi di libertà si abbasseranno a 3n - k . Occorre conoscere solo 3n-k parametri indipendenti per individuare la posizione del sistema istante per istante (confronta con gli esempi 3.3, 3.4, 3.5 del paragrafo 3.2)**.**

Si definisce **moto rigido** di un sistema di punti quello durante il quale si conservano inalterate le mutue distanze fra i suoi punti. Ogni sistema che si muove di moto rigido è detto **sistema rigido (corpo solido** in cui sono trascurabili le deformazioni).

La condizione di Rigidità esprime il fatto che, durante il moto, le distanze L_{ij} tra coppie di punti P_i , P_j del sistema, rimangono invariate:

$$(P_i(t) - P_j(t))^2 = L^2_{ij} \quad i,j=1,2,..n \qquad (3.17)$$

e cioè

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - L^2_{ij} = 0 \qquad (3.18)$$

relazione vincolare valida per ogni coppia di punti P_i e P_j del sistema. Le reazioni vincolari corrispondenti alla condizione di rigidità (3.17) rappresentano la mutua azione del punto P_i sul punto P_j e di P_j sul punto P_i e quindi, per il Principio di Azione e Reazione, sono coppie di forze di braccio nullo con rette d'azione parallele al vettore $(P_i - P_j)$. **In definitiva, i vincoli interni di rigidità possono essere dunque considerati alla stregua di un sistema di forze interne equivalente a zero, e quindi <u>non compaiono</u> nelle Equazioni Cardinali della Statica**.

Dalla condizione di rigidità (3.17) ne viene di conseguenza che un sistema di n punti materiali collegati rigidamente , libero di muoversi nello spazio, ha **6 gradi di libertà** e cioè la sua configurazione, istante per istante, viene determinata da soli 6 parametri indipendenti.

Verifichiamolo per passi successivi:

1) 2 punti collegati rigidamente: 5 gradi di libertà (3 per il primo + 3 per il secondo = 6, meno 1 condizione di rigidità (3.17) ; 6-1 = 5 gradi di libertà)

2) 3 punti collegati rigidamente: 6 gradi di libertà (5 per i primi due punti. Per il terzo punto,collegato rigidamente con i primi 2, risultano 3 gradi di libertà meno due relazioni vincolari (3.17), cioè 3-2 = un solo grado di libertà; e quindi 5+1=6 gradi di libertà)

3) 4 punti collegati rigidamente: 6 gradi di libertà (6 per i primi 3; al quarto collegato rigidamente ai primi 3, non resta alcun grado libertà. 6+0=6)

etc. etc.

n punti collegati rigidamente : 6 gradi di libertà

QUINDI a partire da 3 punti in poi, i sistemi liberi costituiti da punti collegati rigidamente hanno sempre e solo 6 gradi di libertà.

Con analogo ragionamento si dimostra che i gradi di libertà di un sistema piano libero di n punti collegati rigidamente è uguale a 3.

In conclusione, essendo n arbitrario, un qualsiasi sistema materiale rigido (corpo rigido) libero di muoversi nello spazio possiede 6 gradi di libertà. Bastano 6 parametri indipendenti, detti coordinate Lagrangiane, per determinare la sua posizione nello spazio.
Un corpo rigido piano libero ha invece 3 gradi di libertà e la sua posizione può essere determinata da sole tre coordinate Lagrangiane.
Nota che le coordinate Lagrangiane possono essere di tipo misto cioè coordinate cartesiane e angoli. Nell'Esempio 3.3 sono i due angoli θ e φ.

Come conseguenza, si può dimostrare che

Condizione Necessaria e Sufficiente affinché un sistema rigido vincolato, a vincoli lisci, fissi e olonomi sia in equilibrio in una data posizione è che valgano le Equazioni Cardinali della Statica (3.15) e (3.16)

Nota che per un sistema formato da più corpi rigidi le equazioni cardinali della statica sono sicuramente necessarie ma non sono in genere sufficienti per l'equilibrio.

Si verifica che un sistema formato da più corpi rigidi è in equilibrio se e solo se è in equilibrio ogni sua parte.

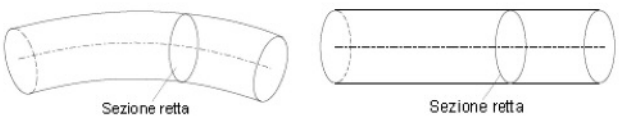
3.7 Trave Vincolata

Nel caso di un sistema rigido le equazioni cardinali della statica sono anche sufficienti a garantire l'equilibrio.
Questo consente, in molti casi, di determinare sia le posizioni di equilibrio, che le reazioni vincolari all'equilibrio
Il problema statico di cui ci interesseremo è il seguente:

Date le forze direttamente applicate e la posizione di equilibrio di un sistema rigido, determinare le reazioni vincolari capaci di mantenere tale posizione di equilibrio.

Noi studieremo in gran parte problemi riferiti a sistemi rigidi piani, per cui le Equazioni Cardinali della Statica si riducono a 3 equazioni scalari.

La **trave** (omogenea) è un particolare sistema rigido in cui una dimensione, la lunghezza, domina sulle altre e pertanto può essere schematizzata con una **linea detta asse** (*luogo dei baricentri delle sue sezioni trasversali*). Lo studio dell'equilibrio delle travi è alla base della Scienza delle Costruzioni.



Per quanto lo studio delle travi curve sia di grande interesse nelle applicazioni, si pensi ad esempio agli archi, ci limiteremo alle travi il cui asse è rettilineo nella configurazione indeformata assumendo come tale la configurazione assunta dalla trave in assenza di azioni esterne applicate. Si farà inoltre quasi sempre la cosiddetta 'ipotesi di piccoli spostamenti', per la quale gli spostamenti dell'asse della trave si assumono sufficientemente piccoli da poter studiare il problema dell'equilibrio con riferimento sempre alla sua configurazione indeformata rettilinea. L'ipotesi di piccoli spostamenti si traduce in un modello matematico estremamente semplificato che fornisce un'efficace schematizzazione della realtà quando le strutture in esame sono dotate di sufficiente rigidezza rispetto alle azioni esterne applicate e quando le azioni stesse non conducono a fenomeni di instabilità.

Nel piano, la trave libera, così come un qualsiasi sistema rigido piano libero, ha **tre gradi di libertà:** fissato un riferimento cartesiano nel piano della trave , è sufficiente conoscere, per esempio, l'angolo ϑ che la trave forma con l'asse delle x e le 2 coordinate di un suo punto per individuare univocamente la sua posizione.

I possibili movimenti di una trave nel piano sono:

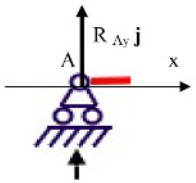
1) traslazione orizzontale
2) traslazione verticale
3) rotazione nel piano

La presenza di **vincoli** può bloccare questi movimenti riducendo in parte o totalmente i gradi di libertà della trave. Ribadiamo che si definisce **Reazione Vincolare** la forza esercitata dal vincolo per impedirne i movimenti.
I vincoli più usati sono:

Carrello (vincolo semplice che toglie un solo grado di libertà a quelli posseduti dal sistema rigido)
Detto anche appoggio scorrevole (senza attrito) bilatero, blocca solo lo spostamento normale alla direzione di scorrimento, non si oppone né a rotazioni attorno ad al punto di appoggio A che rappresenta un estremo della trave, né a traslazioni parallele all'appoggio che sono: orizzontali nella prima figura (verso destra o verso sinistra), verticali nella seconda (verso l'alto o verso il basso) e inclinate di 45° in entrambi i versi nel terzo esempio.
Quindi la reazione vincolare può avere solo **una componente ortogonale all'appoggio** (toglie un solo grado di libertà, 1 g.l.). Non può avere momento rispetto ad A altrimenti ostacolerebbe le rotazioni intorno ad A e quindi la reazione vincolare **deve passare per A.**
Da qui in poi denoteremo con il simbolo **R** la reazione esplicata dal vincolo.

Esempio 3.7.1 Carrello Orizzontale

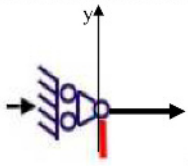
La relazione vincolare è y_A = costante e quindi 3 g.l. - 1 relazione vincolare = 2g.l.



$\mathbf{R}_A = R_{Ay}\,\mathbf{j}$

Esempio 3.7.2 Carrello verticale

La relazione vincolare è x_A = costante e la trave ha 2 g.l.

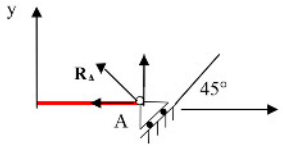


$\mathbf{R}_A = R_{Ax}\mathbf{i}$

Con **i** e **j** versori dell'asse x e y rispettivamente.

Esempio 3.7.3 Carrello Obliquo

La direzione di scorrimento del carrello è inclinata di 45° rispetto all'asse x



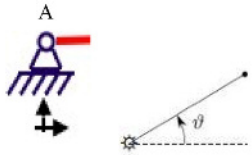
$$\mathbf{R}_A = -R_A \cos 45° \mathbf{i} + R_A \text{sen} 45° \mathbf{j}$$

Abbiamo scomposto il vettore $\mathbf{R}_A$, ortogonale alla direzione di scorrimento, lungo le due direzioni orientate positivamente degli assi x e y (regola del parallelogramma o punta-coda, vedi Cap. 1, paragrafo 1.3) rispettivamente. Il suo modulo R_A è l'unica incognita e infatti la trave ha 2 g.l.

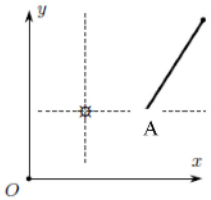
Cerniera liscia (vincolo doppio che toglie due gradi di libertà a quelli posseduti dal sistema rigido): fissa la posizione del punto A di appoggio, blocca sia lo spostamento verticale che orizzontale, consentendo le rotazioni intorno ad A, quindi la reazione vincolare avrà **sia un componente orizzontale** $R_{Ax}\mathbf{i}$ **che uno verticale** $R_{Ay}\mathbf{j}$ (toglie due gradi di libertà); la reazione deve avere momento nullo rispetto ad A altrimenti ostacolerebbe le rotazioni intorno ad A e quindi la reazione vincolare **deve passare per A.** $\mathbf{R}_A = R_{Ax}\mathbf{i} + R_{Ay}\mathbf{j}$

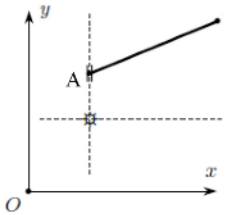
Esempio 3.7.4 Cerniera

Le due relazioni vincolari indipendenti sono: x_A = costante , y_A = costante e quindi 3 g.l. – 2 relazioni vincolari = un grado di libertà e come coordinata Lagrangiana si può scegliere l'angolo ϑ che essa forma con l'asse delle **x.**



Questo vincolo può anche essere visto come la sovrapposizione di due vincoli a carrello, per esempio su due rette perpendicolari, rendendo ancora più evidente il significato di vincolo doppio, come **sovrapposizione** di due vincoli semplici.





Esempio 3.8 Incastro

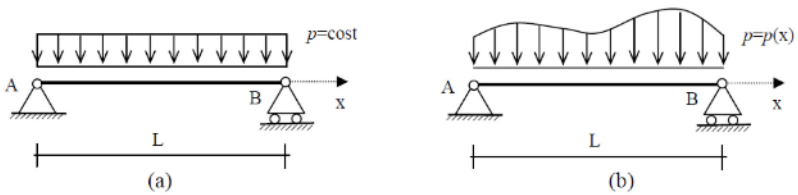
E' un **vincolo triplo che toglie 3 gradi di libertà a quelli posseduti dal sistema**: blocca tutti e tre gli spostamenti della trave. Fornisce quindi una reazione vincolare passante per A, che impedisce traslazione orizzontale e verticale, più una qualsiasi coppia agente nel piano del sistema il cui momento impedisce le rotazioni (toglie 3 gradi di libertà, 3 incognite reazioni vincolari).

$R_{Ax}\mathbf{i} + R_{Ay}\mathbf{j}$, **M**

Le tre relazioni vincolari indipendenti sono: x_A = cost. , y_A = cost, ϑ = costante e quindi 3 g.l. – 3 relazioni vincolari = 0 g.l. In questo caso non è possibile alcun movimento.

Ribadiamo che le ipotesi che abbiamo fatto sui vincoli sono quelle di *vincoli lisci e bilaterali.*

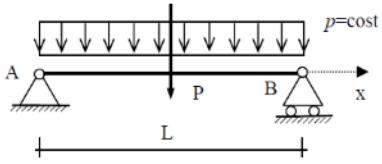
Per quanto riguarda le **forze attive** si adottano criteri più o meno semplificativi a seconda del livello di dettaglio che si intende raggiungere nei risultati. Il criterio spesso utilizzato di considerare le forze agenti in un punto come se **fossero concentrate** in esso è un'astrazione di ciò che si verifica in realtà. Le azioni che generano forze agiscono necessariamente su una porzione non infinitesima L'esperienza ci mostra che i vari carichi agiscono su porzioni non infinitesime di superficie o volume, ossia sono costituiti da forze distribuite. Tuttavia in alcuni casi, quando le dimensioni delle superfici di azione sono piccole, si preferisce per semplicità di calcolo considerare le forze concentrate in un punto dando così luogo alle cosiddette *forze concentrate*
I carichi possono però essere rappresentati anche come forze distribuite lungo una linea, su una superficie, o all'interno di un volume,si parla allora di *carico ripartito*.
Il carico ripartito su una trave viene rappresentato graficamente mediante un diagramma, detto appunto di carico, disegnato sopra lo schema dell'elemento considerato: l'ordinata, corrispondente ad una sezione qualunque della trave, letta sul diagramma in una determinata scala (quella delle forze), rappresenta l'intensità del carico agente su quella sezione.



In (a) si ha il caso assai frequente nelle applicazioni di *carico uniformemente ripartito*, cioè costante lungo la trave; in (b) si ha il caso più generale di carico ripartito variabile.

Il risultante di un carico distribuito ha modulo coincidente con l'area del diagramma che lo descrive e retta d'azione passante per il baricentro del diagramma stesso.

In particolare, nel caso sopra indicato di carico uniformemente ripartito su una trave, il risultante P, dimensionalmente dato da N/m, agisce sulla metà di L e vale: $P = p\,L$, con p valore costante del carico per unità di lunghezza (centro del sistema di vettori paralleli "forze peso" nel caso di una distribuzione continua di massa, come vedremo nel Cap.)



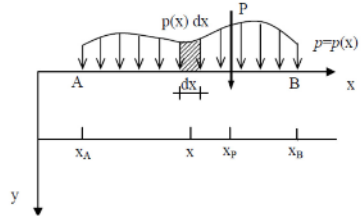
Nel caso di carico distribuito non uniformemente si ha per la risultante:

$$P = \int_{x_A}^{x_B} p(x)dx$$

con p(x) densità lineare di carico (di forza peso) la cui retta d'azione passa per il baricentro x_P del corrispondente diagramma

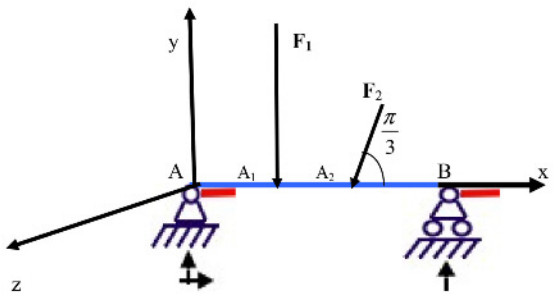
$$P\,x_P = \int_{x_A}^{x_B} p(x)x\,dx$$

Corrispondente alla definizione di centro di massa x_p nel caso continuo, p(x)dx "elemento di forza peso"



3.8 Metodo Analitico di Calcolo delle Reazioni Vincolari Mediante le Equazioni Cardinali della Statica

Fissato un sistema di riferimento cartesiano, consideriamo la trave AB disposta, nel piano xy, lungo l'asse delle x e con l'estremo A coincidente con l'origine del sistema di riferimento. La trave è vincolata all'esterno mediante una cerniera sferica in A e un carrello di scorrimento orizzontale nell'altro estremo B.
Si vuole determinare le reazioni vincolari $\mathbf{R}_A$ ed $\mathbf{R}_B$, esplicate sulla trave sotto l'azione di due forze note $(A_1, \mathbf{F_1})$ **e** $(A_2, \mathbf{F_2})$ contenute nel piano xy della trave, affinché essa sia **in equilibrio in questa posizione.**
Il sistema ha zero gradi di libertà in quanto ai 3 g.l. , se la trave fosse libera, vanno tolti 2 bloccati dalla cerniera e 1 dal carrello, 3 – (2+1) = 0 g.l.



DATI del problema: $AA_1 = 2m$, $AA_2 = 4m$, $AB = 6m$, $F_1 = 2$ t, $F_2 = 1$ t

Scriviamo le forze nella loro rappresentazione cartesiana:

$\mathbf{F_1} = -2\,\mathbf{j}$, $\mathbf{F_2} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$,

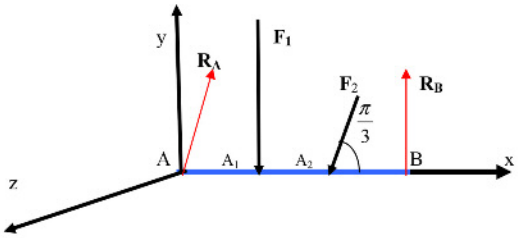
$\mathbf{R_A} = R_{Ax}\,\mathbf{i} + R_{Ay}\,\mathbf{j}$, $\mathbf{R_B} = R_{By}\,\mathbf{j}$ **le 3 incognite del problema**

e i vettori posizione dei loro punti di applicazione

$(A_1\text{-}A) = 2\,\mathbf{i}$, $(A_2 - A) = 4\,\mathbf{i}$, $(B\text{-}A) = 6\,\mathbf{i}$

Nota che possiamo usare come punti di applicazione della forze $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ rispettivamente i punti A_1 e A_2 sull'asse delle x in quanto appartenenti alle loro rette d'azione poiché, come dimostrato nel Cap. 1, il momento, rispetto ad un polo scelto, non cambia se si fa scorrere il punto di applicazione di un vettore lungo la sua retta d'azione (Esempio 1.17 del Cap.1).

Alla luce delle considerazioni fatte, determiniamo le equazioni Cardinali **C**ardinali della Statica pensando di sostituire ai vincoli le loro reazioni da determinare:



visto che il momento è indipendente dal polo , scegliamo per comodità di calcolo il polo A

Equazioni Cardinali Statica

$$\begin{cases} \mathbf{R_A} + \mathbf{R_B} + \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = \mathbf{0} \\ (A_1\text{-}A) \wedge \mathbf{F_1} + (A_2 - A) \wedge \mathbf{F_2} + (B\text{-}A) \wedge \mathbf{R_B} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Proiettando queste equazioni vettoriali sugli assi della terna cartesiana, si ha:

$$R_{Ax} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = \frac{1}{2}$$

$$R_{Ay} + R_{By} - 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$-4 - 2\sqrt{3} + 6\, R_{By} = 0$$

e quindi

$$R_{Ax} = \frac{1}{2}\ ,\quad R_{Ay} = \frac{8-\sqrt{3}}{6}\ ,\quad R_{By} = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$$

Nota: In forma matriciale il sistema delle tre equazioni nelle tre incognite si può scrivere

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{A\,R = C}$$

dove **A** è la matrice quadrata dei coefficienti delle incognite, **R** è il vettore colonna delle incognite e **C** è il vettore colonna dei termini noti.
Poiché il determinante della matrice A dei coefficienti è diverso da zero, il sistema delle tre equazioni nelle tre incognite R_{Ax} , R_{Ay} , $R_{By,}$ ammette una e una sola soluzione (Teorema di Cramer per i sistemi di equazioni lineari) e la trave viene detta "**isostatica".**

3.8.1 Classificazione Statica di una trave

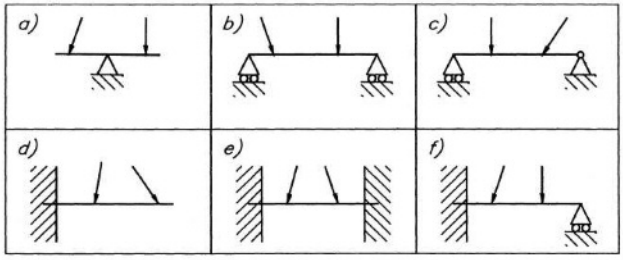
Per il calcolo delle reazioni vincolari è necessario sapere se una trave possiede un numero di vincoli *insufficiente, strettamente sufficiente o sovrabbondante per il suo equilibrio.* Nel primo caso la struttura si dice labile, nel secondo isostatica, nel terzo iperstatica.
Vediamolo più in dettaglio.

Labile: i vincoli sono tali da lasciare al sistema uno o più gradi di libertà, il numero di incognite reazioni vincolari è inferiore al numero delle equazioni d'equilibrio e quindi l'equilibrio è impossibile, a meno che non si incontrino particolari sistemi di forze attive; ciò significa che non esistono in generale reazioni vincolari in grado di assicurare l'equilibrio e che perciò il corpo si metterà in movimento. Organismi di questo tipo, detti catene cinematiche o sistemi ipostatici, sono privi di interesse per la Scienza delle Costruzioni, mentre vengono studiati nell'ambito della Meccanica Applicata alle Macchine. Nel seguito verrà affrontato un particolare esempio fornito dal cosiddetto "Arco a 3 Cerniere".

Isostatica: le reazioni vincolari incognite sono nello stesso numero delle equazioni d'equilibrio del sistema rigido considerato e possono perciò essere determinate in modo univoco. Se esiste, la soluzione è unica.

Iperstatica: le incognite reazioni vincolari sono in numero superiore a quello delle equazioni fornite dalla statica dei corpi rigidi. Esistono infiniti sistemi di reazioni vincolari che rispettano l'equilibrio, **il grado *n* di indeterminazione** di una struttura è misurato dal numero di incognite reazioni vincolari eccedenti quello delle equazioni disponibili. Il caso delle strutture *iperstatiche* è quello più frequente nella pratica e per queste l'esperienza dimostra che l'equilibrio risulta ben definito. È perciò evidente che è l'ipotesi di corpo rigido che rende indeterminato questo caso, problema che viceversa ridiventa determinato quando si tenga conto della deformabilità dei corpi, argomento questo trattato in Scienza delle Costruzioni.

Nel caso di una sola trave, che nel piano **possiede 3 gradi di libertà**, si possono avere le seguenti situazioni



a) labile; b)labile; c)isostatica; d)isostatica; e)iperstatica con grado n – 3; f)iperstatica con n–1

Ricorrendo alla teoria dei sistemi di equazioni lineari possiamo preventivamente fare un'analisi statica della trave.

i) Se il numero di vincoli è **uguale** al numero di gradi di libertà allora la matrice **A** dei coefficienti delle incognite reazioni vincolari, presenti nelle 3 equazioni della statica, è quadrata e se il $\det[\mathbf{A}] \neq 0$, il sistema è *staticamente determinato o isostatico* e il problema statico ammette una ed una sola soluzione (Metodo di Cramer).

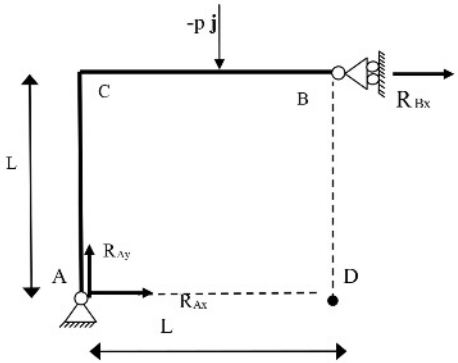
ii) Se il numero di vincoli è **superiore** al numero di gradi di libertà posseduti dal sistema, il sistema è *staticamente indeterminato o iperstatico*. La matrice **A** ha un numero di colonne maggiore di quello delle righe per cui il sistema di equazioni di equilibrio ammette infinite soluzioni (Teorema di Rouchè-Capelli).

*iii)*Se il numero di vincoli è **inferiore** al numero di gradi di libertà del sistema, il sistema è *staticamente impossibile o ipostatico*. La matrice **A** ha un numero di righe maggiore del numero di colonne, per cui il sistema è sovradeterminato. Il problema statico, in generale, non ammette soluzione (Teorema di Rouchè. Capelli).

iv) Se il numero di reazioni vincolari è **pari** ai gradi di libertà del sistema, **ma è detA=0,** in questo caso il *sistema è staticamente degenere(apparentemente isostatico)* e il problema statico non ammette soluzione. Il sistema degenere è quindi essenzialmente **staticamente impossibile.**

Esempio 3.9 Struttura isostatica

La seguente struttura rigida è composta da due travi AC e CB di eguale lunghezza L e saldate fra loro nel punto C.
La trave CB è soggetta ad un carico di peso pari a $-p\,\mathbf{j}$, la sua retta d'azione, ortogonale all'asse orizzontale, passa per il suo punto di mezzo. La struttura è vincolata in A mediante una cerniera e in B mediante un carrello a scorrimento verticale, 3 – 3 = 0 g.l.



$$\mathbf{R_B} = R_{Bx}\,\mathbf{i},\quad \mathbf{R_A} = R_{Ax}\,\mathbf{i} + R_{Ay}\,\mathbf{j}$$

Da notare che la retta d'azione di $\mathbf{R_B}$ è necessariamente parallela all'asse delle x ma il verso è scelto ad arbitrio ed è incognito.

EQUAZIONI CARDINALI CON POLO IN A: 3 equazioni in 3 incognite

$$R_{Ax} + R_{Bx} = 0$$

$$R_{Ay} - p = 0$$

$$-R_{Bx}\,L - \frac{p\,L}{2} = 0$$

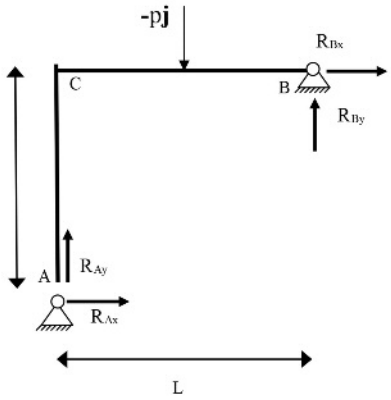
Verifichiamo che la struttura è isostatica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Bx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -p \\ \dfrac{-p\,L}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Il determinante dei coefficienti è diverso da zero, esiste una e una sola soluzione (Cramer).

Esempio 3.10 Struttura iperstatica

In questo caso, diversamente dal precedente, anche in B c'è una cerniera e quindi il problema presenta 4 incognite reazioni vincolari contro solo 3 equazioni. Il numero dei g.l. della struttura (3) è inferiore al numero delle relazioni vincolari (4).



$$R_B = R_{Bx}\,i + R_{By}\,j$$

$$R_A = R_{Ax}\,i + R_{Ay}\,j$$

Equazioni Cardinali con Polo di riferimento in A

$$R_{Ax} + R_{Bx} = 0$$

$$R_{Ax} + R_{By} - p = 0$$

$$-R_{Bx}\,L + R_{By}\,L - \frac{p\,L}{2} = 0$$

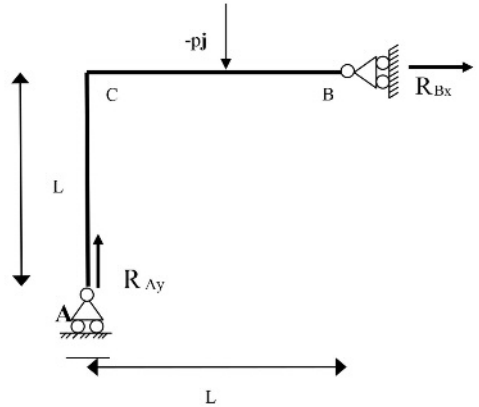
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Bx} \\ R_{By} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -p \\ -\frac{pL}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3 equazioni in 4 incognite

Applicando il Teorema di Rouchè Capelli, si ha che il rango della matrice completa e quello della incompleta sono uguali a 3, quindi ci sono infinite ($\infty^{4-3=1}$) soluzioni in dipendenza di un parametro scelto tra le quattro incognite.

Esempio 3.11 Struttura labile o ipostatica

In questo caso, diversamente dal precedente, sia in A che in B c'è un carrello, cioè un vincolo semplice, e entrambi tolgono due gradi di libertà. La struttura rimane con un grado di libertà e non potrà esserci equilibrio.



$$R_B = R_{Bx} i$$
$$R_A = R_{Ay} j$$

Equazioni Cardinali con Polo di riferimento in A

$R_{Ay} - p = 0$
$R_{Bx} = 0$ **3 equazioni in 2 incognite**
$-R_{Bx} L - pL/2 = 0$

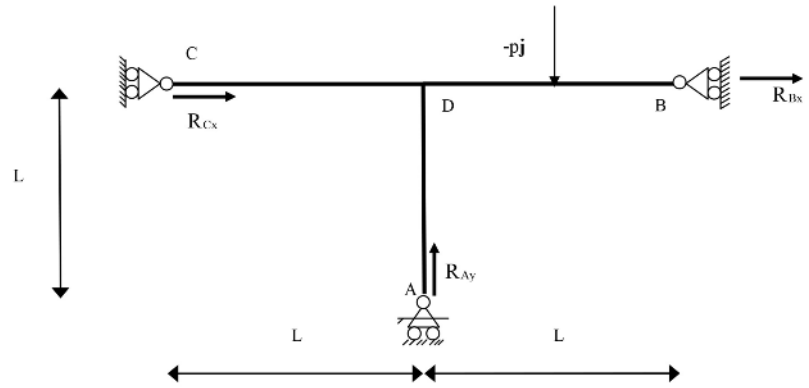
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{Ay} \\ R_{Bx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -p \\ -\frac{pL}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Applicando il Teorema di Rouchè-Capelli**, risulta che** il problema è impossibile in quanto il rango della matrice incompleta è 2 mentre il rango della matrice completa è 3.
A verifica di ciò notiamo che scegliendo il polo in C (indipendenza dal polo) il momento di R_{Ay} ed R_{Bx} rispetto a C, punto di intersezione delle loro rette di azione, è nullo. Poiché invece la risultante delle forze attive p ha retta d'azione non passante per *C*, il suo momento rispetto a *C* è diverso da zero e di conseguenza la terza equazione risulta impossibile.

Esempio 3.12 Struttura apparentemente isostatica

In questo caso la struttura rigida è composta da tre travi AD, CD e DB di uguale lunghezza L saldate tra loro in D e vincolata da tre carrelli come in figura. Se togliamo dai 3 g.l. posseduti

dalla struttura un grado di libertà per ciascun carrello (3-3 = 0) otteniamo zero gradi di libertà per la struttura e saremmo portati a concludere che essa è isostatica.



Equazioni Cardinali con Polo in D

$$R_{Bx} + R_{Cx} = 0$$
$$R_{Ay} - p = 0$$
$$-R_{Bx} L - R_{Cx} L - \frac{pL}{2} = 0$$

3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -L & 0 & -L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{Bx} \\ R_{Ay} \\ R_{Cx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -pL \\ \frac{-pL}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

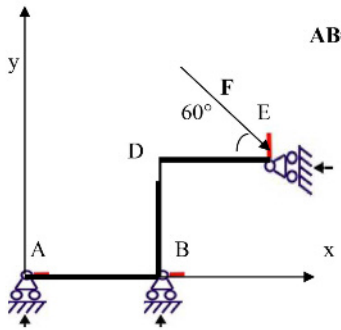
3 equazioni in 3 incognite, ma il determinante della matrice dei coefficienti è nullo in quanto la prima e la terza riga sono proporzionali. La matrice incompleta ha quindi rango 2 mentre la matrice completa ha rango 3. Non esiste alcuna soluzione di equilibrio.
Da notare che a causa della convergenza in *D* delle rette d'azione delle reazioni vincolari, è nullo il momento rispetto a *D* delle reazioni vincolari stesse, mentre è diverso da zero quello dovuto alle forze attive e quindi si arriva ad una equazione impossibile:

$$R_{Bx} = -R_{Cx}$$
$$R_{Ay} = pL$$
$$-\frac{pL}{2} = 0 \quad \text{impossibile !!}$$

Ogni volta che le reazioni di 3 appoggi passano per lo stesso punto (proprio o improprio) risulta che solo 2 vincoli sono indipendenti e quindi alla trave rimane un grado di libertà. Essa può traslare.

Esempio 3.13 Verifica di isostaticità e calcolo reazioni vincolari trave vincolata con 3 carrelli

Per la struttura piana, come in figura, costituita dalle tre travi AB, BD, DE rigidamente collegate fra loro e vincolate all'esterno mediante tre appoggi semplici in A, in B e in E rispettivamente, sottoposta ad un carico **F** inclinato di un angolo di 60° rispetto all'asse orizzontale,
a) si verifichi l'isostaticità
b) si calcolino le reazioni vincolari con le Equazioni Cardinali della Statica



AB=BD=DE = 1m , $|\mathbf{F}| = 30$kg

I tre carrelli tolgono ciascuno un grado di libertà e quindi il sistema piano, che ha 3 gradi di libertà, sembra isostatico.
Facciamo un controllo analitico.

Le E.C.S. con polo in A sono:

$$\mathbf{R_A} + \mathbf{R_B} + \mathbf{R_E} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{B}-A) \wedge \mathbf{R_B} + (E - A) \wedge \mathbf{F} + (\mathbf{E}-A) \wedge \mathbf{R_E} = \mathbf{0}$$

Il sistema di forze attive e vincolari agenti sulla struttura è un sistema piano di vettori:

$\mathbf{R_A} = R_{Ay}\,\mathbf{j}$; $\mathbf{R_B} = R_{By}\,\mathbf{j}$; $\mathbf{R_E} = R_{Ex}\,\mathbf{i}$; $\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j}$
dove
$F_x = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{F}| \cos 60^0 = 30 \cdot 1/2 = 15$
e
$F_y = \mathbf{F} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{F}| \cos(60° + \pi/2) = 30 \cdot (-\sqrt{3}/2) = -15\sqrt{3}$
sono le componenti del vettore **F** lungo gli assi x e y

Componenti scalari della I equazione vettoriale:

$$R_{Ex} + 15 = 0 \; ; \qquad R_{Ay} + R_{By} - 15 \cdot \sqrt{3} = 0$$

La seconda equazione vettoriale, essendo il sistema di vettori piano, avrà la sola componente lungo l'asse z. Infatti

$\mathbf{(B\text{-}A)} \wedge \mathbf{R_B} = \mathbf{i} \wedge R_{By}\,\mathbf{j} = R_{By}\,\mathbf{k}$; $(E - A) \wedge \mathbf{F} = (2\mathbf{i} + \mathbf{j}) \wedge (15\mathbf{i} - 15 \cdot \sqrt{3}\,\mathbf{j}) = -30 \cdot \sqrt{3}\,\mathbf{k} - 15\,\mathbf{k}$

$\mathbf{(E\text{-}A)} \wedge \mathbf{R_E} = (2\mathbf{i} + \mathbf{j}) \wedge R_{Ex}\,\mathbf{i} = -R_{Ex}\,\mathbf{k}$

quindi, la terza equazione scalare è:

$$R_{By} - R_{Ex} - 30 \cdot \sqrt{3} - 15 = 0$$

Le 3 Equazioni Cardinali della Statica sono allora

$$R_{Ex} + 15 = 0$$

$$R_{Ay} + R_{By} - 15 \cdot \sqrt{3} = 0$$

$$R_{By} - R_{Ex} - 30 \cdot \sqrt{3} - 15 = 0$$

3 equazioni in 3 incognite

In forma matriciale si ha

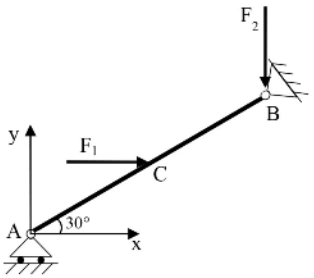
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{Ex} \\ R_{Ay} \\ R_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15\sqrt{3} \\ 15 + 30\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Essendo il determinante della matrice dei coefficienti uguale a 1 e quindi diverso da zero, il sistema ammette una e una sola soluzione per il Teorema di Cramer. La struttura è dunque **isostatica**.
Soluzione: $R_{Ex} = -15\text{kg}$, $R_{By} = 30 \cdot \sqrt{3}\text{kg}$, $R_{Ay} = -15 \cdot \sqrt{3}\text{kg}$

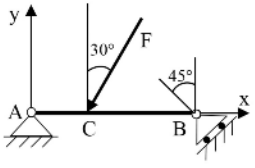
ESERCIZI PROPOSTI

Per ciascuna delle seguenti travi:

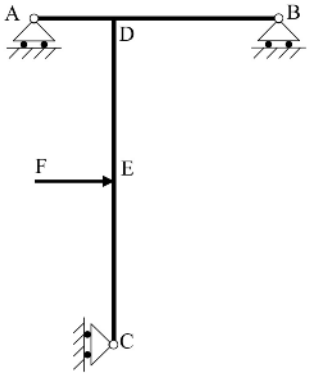
1. Determinare se sono strutture isostatiche
2. Calcolare le Reazioni Vincolari con le equazioni cardinali della statica



AB= 2 m
AC= 1 m
F_1= 5 Kg
F_2= 3 Kg



AB= 6 m
AC= 2 m
F= 9 Kg



AD= 1 m
DB= 2 m
DE= 2 m
EC= 2 m
F= 30 Kg

3.9 Equilibrio di un sistema composto da due corpi rigidi. Arco a Tre Cerniere

Consideriamo il sistema costituito da 2 travi (aste) AC e CB incernierate tra loro in C (non saldate nel punto C) e vincolato, inoltre, con due cerniere fisse agli estremi A e B. Poiché le due aste non sono saldate in C esse possono ruotare intorno a C. Il sistema non è rigido ma composto da due parti rigide.
Nella Figura 3.3 è riportato un esempio di arco a 3 cerniere in cui una delle due travi, CB, è scarica mentre l'altra, AC, è soggetta ad una forza verticale F_1

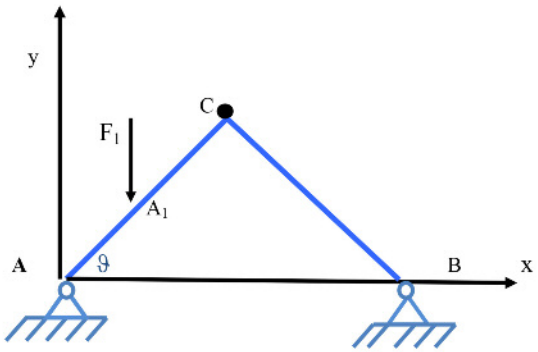


Figura 3.3 Arco a 3 cerniere

Le due aste hanno nel piano 3+3 = 6 gradi di libertà; le tre cerniere tolgono 2+2+2=6 gradi di libertà: il sistema è dunque isostatico.

I Osservazione: Se applichiamo le equazioni cardinali della statica all'**intero** sistema, la cerniera in C è **interna** e quindi, per il Terzo Principio di Newton, la sollecitazione che AC trasmette a CB tramite C, $\mathbf{R_{AC}}$, è equilibrata da quella che CB esercita su AC, $\mathbf{R_{CB}}$, cioè : $\mathbf{R_{AC} = - R_{CB}}$. Entrambe le reazioni, passando per C hanno momento nullo rispetto a C. Queste sollecitazioni appartengono alla categoria delle forze interne (equilibrate) e quindi non compaiono nelle equazioni cardinali, relative all'intero sistema, che conterranno solo le quattro incognite R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Bx} , R_{By} e quindi le **tre** equazioni cardinali applicate all'intero sistema **non sono sufficienti** a determinare queste **4 incognite.**
Questo risultato è una diretta conseguenza del fatto che il sistema complessivo non è rigido (le due aste possono ruotare intorno alla cerniera C) e quindi le Equazioni Cardinali della Statica sono solo necessarie ma non sufficienti per l'equilibrio.

II Osservazione: Un sistema composto da più parti è in equilibrio se ogni sua parte è in equilibrio e viceversa
Quindi le equazioni cardinali della statica devono valere separatamente per l'equilibrio di ciascuna delle due aste.

I Metodo di Soluzione: Equazioni Cardinali Applicate all'Intero Sistema

Grazie alla **I Osservazione,** se non siamo interessati al calcolo della reazione in C, le ECS applicate all'intero sistema forniscono il seguente sistema di equazioni vettoriali

$$\begin{aligned} &\mathbf{R_A} + \mathbf{R_B} + \mathbf{F_1} = \mathbf{0} \\ &(A_1\text{-}A) \wedge \mathbf{F_1} + (B\text{-}A) \wedge \mathbf{R_B} = \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (3.20)$$

Le (3.20) corrispondono a 4 equazioni scalari e quindi abbiamo un sistema di 3 equazioni in 4 incognite. Bisogna trovare una quarta relazione tra le stesse incognite per poter determinare una soluzione.
In base alla **II Osservazione** si possono scrivere le **equazioni cardinali** per l'equilibrio di una delle due aste**, per esempio l'asta CB**.
Per non introdurre altre incognite dobbiamo scegliere il polo in C e utilizzare, come quarta equazione, **l'equazione dei momenti rispetto a C**:

IV equazione , equilibrio asta CB

$$(B\text{-}C) \wedge \mathbf{R_B} = \mathbf{0}$$

Abbiamo dunque il seguente sistema di 3 equazioni vettoriali:

$$\begin{aligned} &\mathbf{R_A} + \mathbf{R_B} + \mathbf{F_1} = \mathbf{0} \\ &(A_1\text{-}A) \wedge \mathbf{F_1} + (B\text{-}A) \wedge \mathbf{R_B} = \mathbf{0} \\ &(B\text{-}C) \wedge \mathbf{R_B} = \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (3.21)$$

corrispondente ad un sistema di 4 equazioni scalari in 4 incognite risolubile con I metodi consueti.

II METODO DI SOLUZIONE: Equazioni di equilibrio applicate a ciascuna asta

Con questo metodo si determina anche la reazione in C.
Grazie alla II Osservazione possiamo utilizzare le ECS per ciascuna delle due travi e quindi abbiamo a disposizione 3 equazioni scalari per l'asta AC e 3 per l'asta CB, cioè, 6 equazioni.

In questo caso oltre alle incognite reazioni vincolari $\mathbf{R_A}$ **e** $\mathbf{R_B}$ delle due cerniere avremo anche che la cerniera interna C esplica la reazione $\mathbf{R_{AC}}$ dell'asta AC su CB e, per il principio di azione e reazione, la reazione $\mathbf{R_{CB}}$ dell'asta CB su AC , con $\mathbf{R_{CB}} = -\mathbf{R_{AC}}$.
Scegliendo il polo in C , si ha **:**

equilibrio asta AC

$$\begin{aligned} \mathbf{R_A} - \mathbf{R_{AC}} + \mathbf{F_1} &= \mathbf{0} \\ (A-C)\wedge \mathbf{R_A} + (A_1-C)\wedge \mathbf{F_1} &= \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (3.22)$$

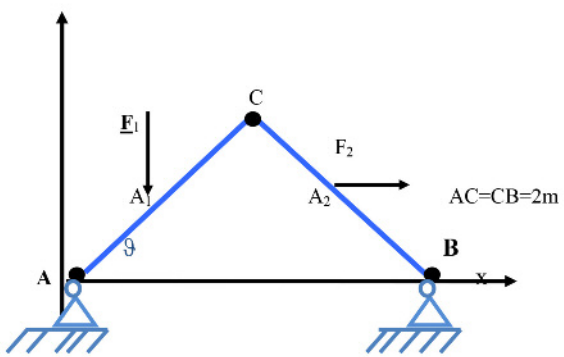
equilibrio asta CB

$$\begin{aligned} \mathbf{R_B} + \mathbf{R_{AC}} &= \mathbf{0} \\ (B-C)\wedge \mathbf{R_B} &= \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (3.23)$$

Attenzione al segno opposto nelle prime delle (3.22) e (3.23)
Da notare che, essendo l'asta CB scarica, l'ultima delle (3.23) fornisce l'informazione che la reazione $\mathbf{R_B}$ **,** dovendo avere momento nullo rispetto a C e dovendo (per definizione di cerniera liscia) passare per B**,** ha la direzione CB.
I due sistemi corrispondono dunque a 6 equazioni scalari nelle 6 incognite reazioni vincolari esplicate dalle 3 cerniere.

Esempio 3.15 Esercizio proposto
Seguendo i procedimenti sopra indicati, determinare numericamente le incognite reazioni vincolari utilizzando i dati assegnati.

$AA_1 = 1m$
$F_1 = 2\ kg$
$F_2 = 1kg$
$\vartheta = 45^0$
$CA_2 = A_2B = 1m$



Suggerimenti:

a) Possiamo utilizzare la I Equazione Cardinale applicata all'intero sistema

$$\mathbf{R_A} + \mathbf{R_B} + \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = 0$$

$$R_{Ax} + R_{Bx} + F_2 = 0$$
$$R_{Ay} + R_{By} - F_1 = 0$$

e la II Equazione relativa all'equilibrio di ciascuna asta, scegliendo il polo in C:

asta AC $\quad (A_1\text{-}C) \wedge \mathbf{F_1} + (A\text{--}C) \wedge \mathbf{R_A} = 0$

asta CB $\quad (B\text{--}C) \wedge \mathbf{R_B} = 0$

per un totale di 4 equazioni in 4 incognite

oppure

b) tre equazioni per l'equilibrio di ciascuna asta

asta AC

$$\mathbf{R_A} - \mathbf{R_{AC}} + \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = \mathbf{0}$$
$$(A\text{-}C) \wedge \mathbf{R_A} + (A_1\text{-}C) \wedge \mathbf{F_1} = \mathbf{0}$$

asta CB

$$\mathbf{R_B} + \mathbf{R_{AC}} = \mathbf{0}$$
$$(B\text{--}C) \wedge \mathbf{R_B} = \mathbf{0}$$

Per un totale di 6 equazioni in 6 incognite che ci consentono di calcolare anche la reazione R_{AC}

4. RICHIAMI DI CINEMATICA. MOTI RIGIDI

Il carattere vettoriale della velocità fornisce istante per istante la direzione del moto di un punto che è una informazione altrettanto necessaria quanto la rapidità di variazione della sua posizione.
Nel caso di un moto circolare l'espressione cartesiana del vettore velocità fornisce una quantità meccanica di grandissima utilità , la *velocità angolare,* che verrà ripresa nella cinematica dei corpi rigidi, quei corpi, cioè, dove le mutue distanze tra punti rimangono invariate durante il moto. Sulla base delle tecniche sviluppate nel capitolo 2 si trova la legge di distribuzione delle velocità dei punti di un sistema rigido in termini dei due vettori **caratteristici** della **traslazione** e della **rotazione,** essendo il più generale atto di moto rigido una composizione di un moto traslatorio e uno rotatorio. Lo studio di particolari moti, detti *moti rigidi piani,* attraverso l'utilizzo del *centro di istantanea rotazione*, fornisce le basi per la comprensione della trasmissione dei movimenti rigidi di interesse in Scienza delle Costruzioni e in Meccanica Applicata.

4.1 Cinematica del punto

La cinematica studia e descrive , indipendentemente dalle cause , il modo di variare, rispetto al tempo, del punto, degli insiemi di punti, discreti o continui, nei quali vengono schematizzati i corpi naturali. Ciò richiede, evidentemente, la presenza di un osservatore che possa giudicare se il corpo è in moto o in quiete a seconda che cambi o meno la posizione rispetto a lui. Nello studio analitico del moto si fa riferimento ad una terna cartesiana ortogonale, assumendo come unità di misura per le lunghezze il centimetro(cm) e per unità di misura del tempo il secondo(sec). Rimarremo nell'ambito della Meccanica Classica in cui la misura della distanza fra punti e di intervalli di tempo è indipendente dal moto dell'osservatore (non più valido nella Meccanica Relativistica in presenza di moti dell'osservatore vicini a quelli di propagazione della luce).
Richiamiamo a questo proposito nozioni di geometria e fisica elementare.

Con riferimento ad una terna cartesiana ortogonale indipendente dal tempo Oxyz di versori **i, j, k,** e ad un intervallo di tempo $[t_0 , T]$, un punto P si muove assumendo istante per istante una determinata posizione.
La linea luogo delle successive posizioni di P prende il nome di **traiettoria**.
Sia P(t) la posizione all'istante t e $P(t+\Delta t)$ ad un istante $t+\Delta t$. Consideriamo il vettore $P(t+\Delta t)$-P(t), come in Figura 4.1 con $h=\Delta t$, e studiamo il rapporto ("incrementale")

$$\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t} \qquad (4.1)$$

Si definisce **vettore velocità** del punto P all'istante t **il limite** del rapporto (4.1) quando l'incremento Δt tende a zero. Quindi:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} \qquad (4.2)$$

E' errato definire la velocità come derivata dello spazio percorso rispetto al tempo perché in tal modo si perde il carattere vettoriale di questa grandezza che invece è anche caratterizzata dalla variazione della sua direzione, sempre tangente alla traiettoria(solo nel moto rettilineo la direzione rimane costante).

E' il modulo di **v** che dà la rapidità di variazione della posizione del punto.

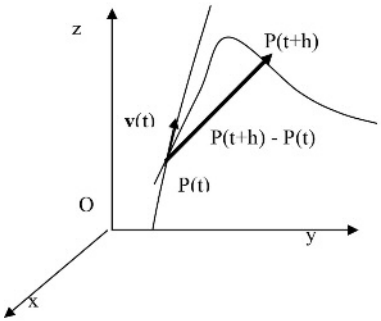


Figura 4.1 Traiettoria e velocità di P

Poiché il punto P è funzione del tempo lo saranno anche le sue coordinate:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad (4.3)$$

Le (4.3) sono le equazioni parametriche della traiettoria percorsa dal punto P

Derivando rispetto al tempo le coordinate di P otteniamo le componenti cartesiane di **v**:

$$v_x = \dot{x}(t)\ ,\ v_y = \dot{y}(t)\ ,\ v_z = \dot{z}(t) \qquad (4.4)$$

da cui otteniamo la **rappresentazione cartesiana** del vettore velocità

$$\mathbf{v} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k} \qquad (4.5)$$

Se è **nota** la curva che corrisponde alla traiettoria di P, possiamo fissare su di essa un sistema di **ascisse curvilinee** mediante la scelta di un punto A come origine e un verso positivo di percorrenza per cui la posizione del punto P su di essa risulta individuato ad ogni istante dalla lunghezza di un arco $s = s(t)$ della curva, $P = P(s)$.
In tal caso le coordinate di P rispetto alla fissata terna di assi cartesiani risulteranno funzioni composte del tempo attraverso l' ascissa curvilinea:

$$x = x(s)\ ,\ y = y(s),\ z = z(s) \qquad (4.6)$$

Le (4.6) costituiscono la **rappresentazione intrinseca della traiettoria percorsa da P con equazione oraria** $s = s(t)$

Dalla regola di derivazione delle funzioni composte risulta:

$$\mathbf{v} = \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{ds}\frac{ds}{dt} = \left[\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right]\dot{s}(t) = \mathbf{t}\,\dot{s}(t) \qquad (4.7)$$

che fornisce la **rappresentazione intrinseca del vettore velocità.**
Nella (4.7) abbiamo denotato con il punto l'operazione di derivazione rispetto al parametro tempo e con **t** il vettore $\frac{dP}{ds}$ dato da:

$$\frac{dP}{ds} = \left[\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right] \equiv \mathbf{t} \qquad (4.8)$$

Dalla geometria si sa che, data una curva di equazioni parametriche (4.3), la lunghezza dell'arco di curva elementare è

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

e quindi calcolando il modulo del vettore **t** si ottiene:

$$|\mathbf{t}| = \left|\left[\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right]\right| = \sqrt{(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 + (\frac{dz}{ds})^2} = \frac{ds}{ds} = 1 \qquad (4.9)$$

E cioè il vettore **t** è un versore (vedi $(1.25)_a$, $(1.25)_b$) che risulta **tangente alla traiettoria per la** (4.7) da cui si ricava anche che $|\mathbf{v}| = |\dot{s}|$.

QUINDI: La velocità di un punto è un vettore tangente alla traiettoria avente per componente su tale tangente lo scalare $\dot{s}$, la derivata dell'ascissa curvilinea rispetto al tempo, detta **velocità scalare (comunemente detta *derivata dello spazio rispetto al tempo*).** Se $\dot{s}$ risulta positiva il punto si sposta nel verso degli archi crescenti (moto progressivo), se negativa nel verso degli archi decrescenti(moto retrogrado).

Se **il versore t è costante il moto è, ovviamente, rettilineo.**

Se $\dot{s}$ è costante, quando cioè il punto percorre spazi uguali in tempi uguali, il moto si dice *uniforme* (ma la traiettoria è qualsiasi). Se in questo caso risulta che anche **t** è costante allora **il vettore velocità risulta, solo in questo caso, costante e il moto è *rettilineo uniforme*.**

Notiamo infine che possiamo definire il **vettore spostamento elementare**:

$$\mathbf{dP} = \mathbf{v}dt = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \qquad (4.10)$$

con:

$$dx = v_x(t)dt,\ \ dy = v_y(t)dt,\ \ dz = v_z(t)dt$$

L'accelerazione è definita dalla derivata del vettore velocità rispetto al tempo, e quindi è un vettore la cui rappresentazione cartesiana è:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} \cdot + \ddot{z}\mathbf{k} \qquad (4.11)$$

Se usiamo la rappresentazione intrinseca (4.7) della velocità, derivando rispetto al tempo si ha:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}(\dot{s}\,\mathbf{t})}{\mathrm{dt}} = \ddot{s}\,\mathbf{t} + \dot{s}\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{dt}} \qquad (4.12)$$

che corrisponde alla rappresentazione intrinseca dell'accelerazione.

Analizziamo il termine $\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{dt}}$ presente nella (4.12). Per la regola di derivazione di funziona composta e dalla (4.8) segue che

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{ds}}\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{ds}}\dot{s} \qquad (4.13)$$

Dove il vettore $\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{ds}}$ risulta ortogonale a **t** che è un versore cioè di modulo costante uguale a 1

Infatti:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}^2}{\mathrm{ds}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\mathbf{t}\cdot\mathbf{t} = 2\mathbf{t}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{ds}} = 0 \qquad (4.14)$$

Ne consegue il vettore $\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{ds}}$ è ortogonale alla tangente alla traiettoria nel punto P, cioè

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{ds}} = c\mathbf{n} \qquad (4.15)$$

con **n versore normale alla traiettoria in P e** $c = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{ds}}\right|$.

Si dimostra che c corrisponde al reciproco del cosiddetto *raggio di curvatura*: $c = \frac{1}{\rho}$

Il piano passante per P(s) della curva-traiettoria e contenente i vettori **t** e **n** si chiama **piano osculatore, n è rivolto verso l'interno della concavità della curva** . Per una curva piana tale piano è proprio il piano della curva, per curve tridimensionali il piano osculatore varia da punto a punto; in ogni caso esso è il piano che riesce meglio a contenere la parte della curva vicino al punto P. Il piano osculatore non è definito nei punti in cui ρ si annulla (traiettoria rettilinea). Il raggio di curvatura è il raggio del **cerchio osculatore**, cioè il cerchio tangente alla curva in P e contenuto nel piano osculatore passante per P, che meglio descrive il comportamento della traiettoria nell'intorno di P.

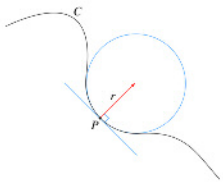


Figura 4.2 Cerchio osculatore

Se accanto ai versori **t** ed **n** associamo il versore **b**, **ortogonale** ad entrambi, $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$, detto **binormale** alla curva in P, e quindi al piano osculatore, la terna **Ptnb variabile con P** (e quindi con s) viene chiamata **triedro principale alla curva in P o terna intrinseca.** Quindi il vettore accelerazione rispetto a questa terna ha espressione intrinseca:

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\,\mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n} \qquad (4.16)$$

Questa scomposizione mostra che **a** giace nel piano osculatore alla traiettoria in P, la sua componente tangenziale è $a_t = \ddot{s}$ e quella normale $a_n = \frac{v^2}{\rho}$. Il componente normale $\frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}$ è noto come **accelerazione centripeta** essendo rivolto dalla parte della concavità.

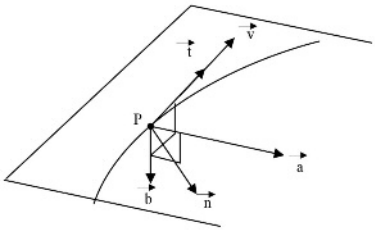


Figura 4.3 Terna intrinseca

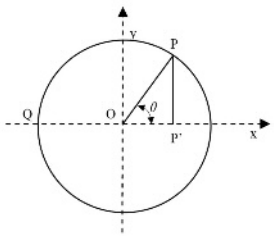
Da notare che mentre nella rappresentazione cartesiana di **a** le componenti si ottengono per derivazione delle componenti della velocità , **ciò non accade** nella rappresentazione intrinseca. **Il motivo è che il triedro principale non è un sistema di riferimento indipendente dal moto di P, e quindi dal tempo,** come accade invece per il riferimento Oxyz.

Dalla formulazione intrinseca dell'accelerazione risulta che nei *moti uniformi* l'accelerazione è solo centripeta essendo $\dot{s}$ costante e quindi $\ddot{s} = 0$. Nei moti rettilinei $\rho = \infty$ l'accelerazione è invece tutta tangenziale. Infine nei moti rettilinei uniformi e **solo in quelli** l'accelerazione è nulla.

Gli esercizi che seguono dovrebbero essere ben noti dai corsi di fisica e vengono qui richiamati perché molto utili nella comprensione di argomenti sui Moti Rigidi che tratteremo nel seguito.

Esempio 4.1 Moto circolare

Un punto P si muove su una circonferenza di centro O e raggio R rispetto ad una terna cartesiana di riferimento Oxy, di versori **i** e **j** , con gli assi coincidenti con due diametri ortogonali.



Usando le coordinate polari (vedi (1.7)), la posizione di P è individuata da

$$x(t) = R\cos\theta(t)\ ,\ y(t) = R\,\mathrm{sen}\,\theta(t) \tag{4.17}$$

le componenti della velocità sono

$$\dot{x} = -\dot{\theta}R\,\mathrm{sen}\theta\ ,\ \dot{y} = \dot{\theta}R\cos\theta$$

o anche , equivalentemente (4.18)

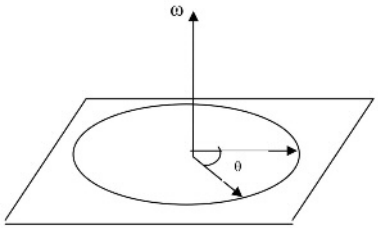
$$\dot{x} = -\dot{\theta}y\ ,\ \dot{y} = \dot{\theta}x$$

dove $\dot{\theta}$ è la velocità angolare.

Definiamo il **vettore velocità angolare** $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{k}$ con **k versore dell'asse z** perpendicolare al piano della circonferenza.

Allora dalle (4.18) risulta per il vettore velocità:

$$\mathbf{v} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} = -\dot{\theta}y\,\mathbf{i} + \dot{\theta}x\,\mathbf{j} = \dot{\theta}\mathbf{k} \wedge (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) \tag{4.19}$$



Le componenti dell'accelerazione sono:

$$\ddot{x} = -\ddot{\theta}R\,\mathrm{sen}\theta - \dot{\theta}^2 R\cos\theta\ ,\ \ddot{y} = \ddot{\theta}R\cos\theta - \dot{\theta}^2 R\,\mathrm{sen}\theta$$

e quindi il vettore accelerazione è

$$\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O) - \omega^2 (P - O)$$

Se il moto è uniforme dovrà essere $\dot{\theta}(t) = \text{costante} = \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = \omega$ fissato valore iniziale della componente scalare della velocità angolare e quindi, integrando tra l'istante iniziale t=0 e un generico istante t si ha, per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale:

$$\int_0^t \dot{\theta}(t)dt = \dot{\theta}_0 \int_0^t dt \Rightarrow \theta(t) - \theta(0) = \dot{\theta}_0 t$$

e quindi $\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0 = \omega t + \theta_0$ con θ_0 fissato valore dell'angolo nella posizione iniziale di P

In questo caso, poiché $\dot{\omega} = 0$, l'accelerazione si semplifica in

$$\mathbf{a} = -\ \omega^2\ \mathbf{(P-O)} \quad \mathbf{con}\ \ \omega = \dot{\theta}_0 \qquad (4.20)$$

L'accelerazione è solo centripeta in quanto il vettore – (P-O) è diretto da P al centro O

Le componenti sugli assi della **(4.20)** forniscono due moti armonici sui due assi retti dalle seguenti equazioni differenziali del secondo ordine

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \qquad (4.21)$$

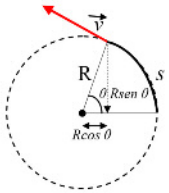
le cui soluzioni , come si può facilmente verificare, sono:

$$x(t) = R\cos(\omega t + \theta_0)\ ,\ y(t) = R\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta_0) \qquad (4.22)$$

Tali moti sono evidentemente periodici **di periodo** $T = \frac{2\pi}{\omega}$ **,** θ_0 è detta **fase** , la costante ω si chiama **pulsazione.** Il numero di giri al secondo compiuti da P o , equivalentemente, il numero delle oscillazioni al secondo dei moti componenti sui due assi è dato $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$ detta **frequenza.** Quindi risulta, come ben noto, che il moto circolare uniforme è dato dalla **composizione di 2 moti armonici** su 2 assi ortogonali.

Esempio 4.2 Moto circolare uniforme rispetto ad un riferimento intrinseco

Studiamo ora il moto di P attraverso l'ascissa curvilinea $s(t) = \theta(t)R$:



Il vettore posizione di P è :

$$P - O = R\cos\frac{s(t)}{R}\mathbf{i} + R\,\mathrm{sen}\frac{s(t)}{R}\mathbf{j}$$

Il versore tangente sarà:

$$\mathbf{t} = \frac{dP}{ds} = -\ \mathrm{sen}\frac{s(t)}{R}\mathbf{i} + \cos\frac{s(t)}{R}\mathbf{j}$$

diretto verso le ascisse curvilinee crescenti, come si verifica facilmente.

Il vettore velocità è dato dunque da

$$\mathbf{v}(s(t)) = \mathbf{t}\,\dot{s}(t) = \omega R\,[-\ \text{sen}\frac{s(t)}{R}\mathbf{i} + \cos\frac{s(t)}{R}\mathbf{j}\ ]\ ,\ \text{con}\ \dot{s}(t) = \omega = \text{costante}$$

Inoltre:

$$c = \left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right| = \left|-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}\mathbf{i} - \frac{1}{R}\text{sen}\frac{s}{R}\mathbf{j}\right| = \frac{1}{R}\ \text{è la curvatura}$$

E' quindi verificato che $\rho \equiv R$, cioè il raggio di curvatura è il raggio della circonferenza.

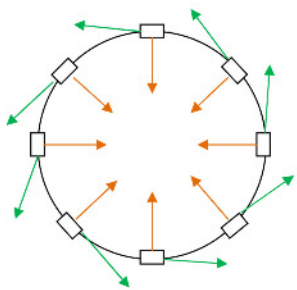
Il **versore n** normale alla traiettoria in P è dato da:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{t}}{ds} = R\left[-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}\mathbf{i} - \frac{1}{R}\text{sen}\frac{s}{R}\mathbf{j}\right] = -\cos\frac{s}{R}\mathbf{i} - \text{sen}\frac{s}{R}\mathbf{j}$$

diretto verso il centro della circonferenza, come si verifica facilmente.
Il vettore accelerazione è:

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\,\mathbf{t} + \frac{\mathbf{v}^2}{\rho}\mathbf{n} = 0 + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n} = R\omega^2\left(-\cos\frac{s}{R}\mathbf{i} - \text{sen}\frac{s}{R}\mathbf{j}\right) = -\ \omega^2\,\mathbf{(P-O)} \qquad (4.23)$$

quindi l'accelerazione è solo centripeta



Abbiamo visto che il moto circolare uniforme è la composizione di due moti armonici su 2 assi ortogonali.
In generale si ha:

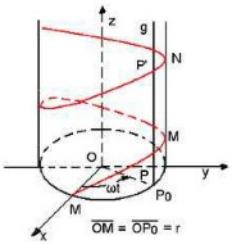
DEFINIZIONE DI MOTO COMPOSTO

Dati n punti P_i , i=1, 2,…,n , $P_i = P_i(t)$, si definisce moto composto il moto del punto P definito da

$$P - O = \sum_{i=1}^{n}(P_i - O) \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{v}_i \quad , \quad \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}_i \qquad (4.24)$$

Esempio 4.3 Composizione di moti: moto elicoidale

Come esempio consideriamo il moto elicoidale uniforme
Si chiama moto elicoidale uniforme il moto composto da un moto circolare uniforme e un moto rettilineo uniforme su una retta perpendicolare al piano della circonferenza e passante per il suo centro.



Introdotta una terna di assi cartesiani Oxyz consideriamo un punto P_1 che percorre una circonferenza di centro O e raggio R nel piano xy e un punto P_2 che si muove di moto rettilineo sulla retta r coincidente, con l'asse z, con velocità $z_2 = v_2(t)$ (orientato in modo tale che rispetto ad esso sia levogiro il verso di percorrenza di P_1 sulla circonferenza). Supponiamo che all'istante iniziale P_1 si trovi sull'asse delle x e P_2 coincida con O.

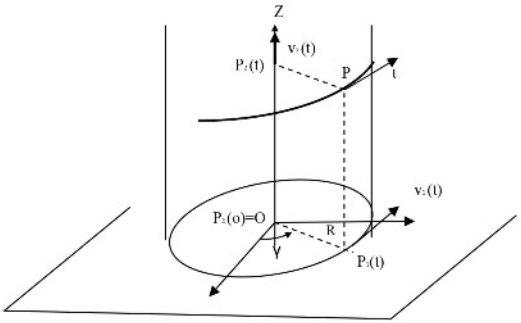
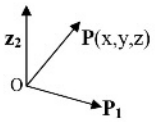


Figura 4.4 Moto Elicoidale

Introdotta una terna di assi cartesiani Oxyz consideriamo un punto P_1 che percorre una circonferenza di centro O e raggio R nel piano xy e un punto P_2 che si muove di moto rettilineo

sulla retta r coincidente, con l'asse z, con velocità $z_2 = v_2(t)$ (orientato in modo tale che rispetto ad esso sia levogiro il verso di percorrenza di P_1 sulla circonferenza). Supponiamo che all'istante iniziale P_1 si trovi sull'asse delle x e P_2 coincida con O (vedi Figura 4.4).
Se (R, φ) sono le coordinate polari di P_1, e z_2 la coordinata di P_2 si ha da (4.24):

$$P\text{-}O = (P_1\text{-}O) + (P_2\text{-}O) = R\cos\varphi\,\mathbf{i} + R\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathbf{j} + z_2\mathbf{k} \qquad \mathbf{P_2}$$



e, proiettando sugli assi, si hanno le equazioni parametriche della traiettoria di P

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\varphi(t) \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}\varphi(t) \\ z_2(t) = \int_0^t v_2(\tau)d\tau \end{cases}$$

Poiché risulta $x^2 + y^2 = R^2$ ne consegue che il punto P si muove sulla superficie del cilindro circolare retto di asse z e raggio R.
Le componenti del vettore velocità **v** del punto P sono:

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\,\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\varphi \\ \dot{y} = R\,\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{z}_2 \equiv v_2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v} = -R\,\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathbf{i} + R\,\dot{\varphi}\cos\varphi\,\mathbf{j} + v_2\mathbf{k}\,, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{R^2\,\dot{\varphi}^2 + v_2^2}$$

Il terzo coseno direttore del vettore velocità è:

$$\left|\cos\hat{\mathbf{vk}}\right| = \frac{v_2}{|\mathbf{v}|} = \frac{v_2}{\sqrt{R^2\,\dot{\varphi}^2 + v_2^2}}$$

Perché la traiettoria di P sia un'elica di tale cilindro occorre che la tangente alla traiettoria in P formi un angolo costante con l'asse z, cioè, il terzo coseno direttore del vettore velocità, $\cos\hat{\mathbf{vk}}$, **sia costante.**
Ne segue che la traiettoria descritta dal punto P nel moto composto è **un'elica cilindrica** se e solo se sono **costanti la velocità angolare e la velocità del moto lungo l'asse z.** Quindi dovranno essere uniformi i moti componenti: il moto composto da un moto circolare uniforme e un moto rettilineo uniforme è un moto elicoidale uniforme.
Si ricorda che il **passo** dell'elica è la distanza tra 2 successive intersezioni della curva con una medesima generatrice. In questo caso è uguale allo spazio L percorso dal punto P_2 nel tempo impiegato da P_1 per compiere un intero giro della circonferenza e cioè in un periodo $\mathbf{T} = \frac{2\pi}{\omega}$

Sarà quindi: $L = \frac{2\pi}{\omega} v_2$ con $\omega = \dot{\varphi} = \text{costante}$.

4.2 Moti Rigidi

Il moto di una sistema di punti P_i $i = 1,\ldots,n$, rispetto ad un prefissato sistema di riferimento, resta determinato dal moto dei singoli punti. Ricordiamo che, come visto nel paragrafo 3.6, si definisce **moto rigido** di un sistema di punti quello durante il quale si conservano inalterate le mutue distanze fra i suoi punti (vedi formule (3.17), (3.18)). Ogni sistema che si muove di moto rigido è detto **sistema rigido (corpo solido** in cui sono trascurabili le deformazioni). Abbiamo anche verificato che un sistema rigido ha **6 gradi di libertà** e cioè la sua configurazione, istante per istante, viene determinata da soli 6 parametri indipendenti
Quindi, per descrivere il moto di un **tale** sistema rispetto ad una terna fissa Σ di origine Ω e assi ξ, η, ζ di versori **i', j', k',** non dobbiamo necessariamente scegliere sei coordinate di suoi 3 punti ma bastano 6 parametri indipendenti.

Per esempio possiamo scegliere una terna cartesiana ortogonale S con origine in un punto O del corpo e gli assi x,y,z, di versori **i, j , k,** rigidamente collegati ad esso, la cosiddetta **terna solidale,** che si muove insieme al sistema**. Il moto è quindi rigido se ogni punto del sistema mantiene inalterate le sue coordinate rispetto a S.** Risulta quindi che il moto del sistema materiale rispetto a Σ è individuato dal moto della terna solidale S rispetto alla terna fissa Σ.
La posizione della terna solidale S rispetto alla terna fissa Σ può essere individuata dalle **3 coordinate** x_0, y_0, z_0 dell'origine O di S e dai **9 coseni direttori** degli assi orientati della terna mobile x,y,z rispetto agli assi ξ, η, ζ della terna fissa. In realtà le sei relazioni tra i versori

$$\mathbf{i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0}$$

e

$$\mathbf{i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1}$$

riducono a 3 i coseni direttori indipendenti che, insieme alle tre coordinate dell'origine O, possono costituire le 6 coordinate Lagrangiane atte a descrivere il moto della terna solidale al sistema rigido. Nel paragrafo seguente diamo un esempio di scelta di 3 opportuni angoli che ricoprono il ruolo di tre delle sei coordinate Lagrangiane.

4.3 Angoli di Eulero

Spesso conviene usare, accanto alle tre coordinate dell'origine O della terna solidale, 3 angoli speciali detti *angoli di Eulero.*
Associamo alla terna mobile S una terna Σ' con origine in O e gli assi paralleli a quelli della terna fissa Σ; sia **n** il versore della retta intersezione dei piani $z = 0$ e $\zeta' = 0$, $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{k}' \wedge \mathbf{k}}{|\mathbf{k}' \wedge \mathbf{k}|}$

($\mathbf{k}' \wedge \mathbf{k} \neq \mathbf{0} \Rightarrow z$ e ζ' non paralleli, non distinti) detta *linea dei nodi* e siano φ e ψ gli angoli che essa forma con gli assi ξ' ed x; sia inoltre θ l'angolo formato tra l'asse z e l'asse ζ'.

Gli angoli θ , φ e ψ, sono i cosiddetti angoli di Eulero che da soli bastano ad individuare l'orientazione della terna solidale rispetto alla terna fissa. Infatti, è possibile far coincidere le due terne mediante **tre successive rotazioni (**vedi i richiami sulle matrici di rotazione formula (1.12)bis.

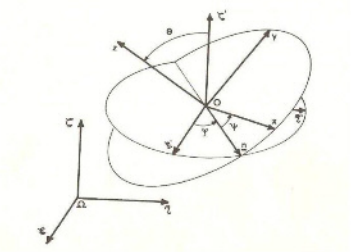
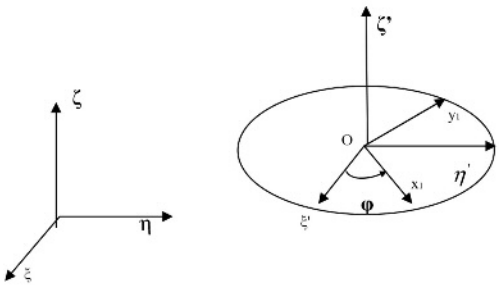


Figura 4.6 Angoli di Eulero

In Figura 4.6 è mostrato l'orientamento di una terna solidale S (Oxyz) rispetto alla terna $\Sigma'(O\xi', \eta', \zeta')$ fissata, per comodità, con l'origine coincidente con l'origine di S e gli assi che si mantengono paralleli a quelli della terna fissa $\Sigma(\Omega\ \xi, \eta, \zeta)$

Per passare da Σ' ad S: partiamo da $\Sigma'(O\xi'\eta'\zeta')$ ed S (Oxyz) coincidenti.

1) facciamo ruotare la terna solidale rispetto a quella fissa di un angolo φ $(0<\varphi<2\pi)$, detto angolo di *precessione*, in senso antiorario intorno all'asse ζ' che porta l'asse ξ' a coincidere con la linea dei nodi x_1 (e l'asse η' su y_1), **come in Figura**



Le componenti (e cioè i coseni direttori) dei versori $\mathbf{i_1}$, $\mathbf{j_1}$, $\mathbf{k_1}$, della terna solidale così ruotata, $0x_1\ y_1\ z_1$, rispetto a quella fissa Σ', soddisferanno alla seguente relazione

$$\mathbf{i}_1 = \cos\varphi\mathbf{i}' + \operatorname{sen}\varphi\mathbf{j}'$$
$$\mathbf{j}_1 = -\operatorname{sen}\varphi\mathbf{i}' + \cos\varphi\mathbf{j}'$$
$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}'$$

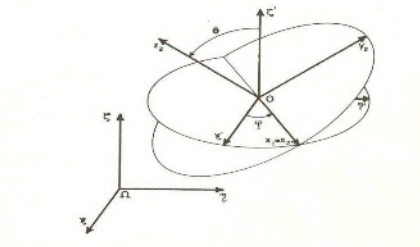
che, in base alla $(1.12)_{bis}$, si può scrivere

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{k}_1 \end{pmatrix} = A_{\varphi} \begin{pmatrix} \mathbf{i'} \\ \mathbf{j'} \\ \mathbf{k'} \end{pmatrix}, \quad i_1 \equiv \text{linea dei nodi } n$$

con

$$A\,\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\varphi & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

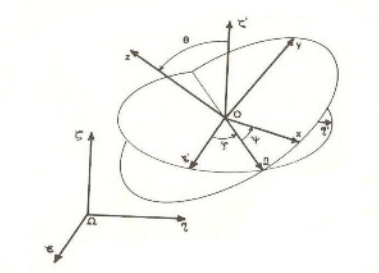
2) Tenendo fisso l'asse x_1 , facciamo ruotare la nuova terna $Ox_1y_1z_1$, dell'angolo $\theta\,(0<\theta<\pi)$, detto angolo di *nutazione* , in senso antiorario attorno all'asse x_1(linea dei nodi) che porterà l'asse z_1 a coincidere con **il nuovo asse z_2 e l'asse y_1 nella nuova posizione y_2.**



Con analoghi passaggi si perviene alla matrice di rotazione da $Ox_1y_1z_1$ a $Ox_2y_2z_2$

$$A\,\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ 0 & -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

3) Infine, tenendo fisso l'asse z_2 , facciamo ruotare la terna ottenuta $Ox_2y_2z_2$ di un angolo ψ $(0< \psi < 2\pi)$, detto angolo *di rotazione propria,* in senso antiorario rispetto all'asse z_2 che porterà la **linea dei nodi n (asse $x_1 \equiv$ asse x_2) a coincidere con l'asse delle x di S** e di conseguenza l'asse y_2 con l'asse y , e otteniamo la terna S di partenza come in **Figura** 4.6.



Con analoghi calcoli si ottiene

$$A_{\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice di trasformazione dalla terna fissa a quella solidale sarà:

$$A = A_{\psi}A_{\theta}A_{\varphi} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\vartheta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\vartheta\cos\psi & \sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\psi & \sin\vartheta\cos\psi & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{i'} \\ \mathbf{j'} \\ \mathbf{k'} \end{pmatrix}$$

I tre angoli di Eulero e le tre coordinate dell'origine O della terna solidale rispetto a quella fissa costituiscono una possibile scelta di 6 parametri indipendenti atti a caratterizzare istante per istante il moto del sistema rigido rispetto ad una terna fissa.

4.4 Formule di Poisson

Abbiamo visto nel paragrafo 3.6 che un sistema rigido libero di muoversi nello spazio ha **6 gradi di libertà** in quanto il moto di ogni suo punto resta determinato da quello di **soli suoi tre punti non allineati P_1, P_2 e P_3.** Fissata allora una terna fissa Σ di origine Ω e assi ξ, η, ζ di versori **i', j', k'** , a cui vanno riferite le configurazioni del **triangolo** di vertici P_1, P_2 e P_3 durante il moto del sistema, consideriamo una terna S che abbia:

a) l'origine O coincidente con P_1
b) il versore $\mathbf{i} = \mathbf{vers}(P_2 - P_1)$,
c) il versore $\mathbf{k} = \mathbf{vers}[(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1)]$
d) il versore $\mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}$

E' evidente che tale terna S = Oxyz, di versori **i, j e k** , è ***solidale*** al sistema rigido considerato: lo spazio riferito ad S è detto spazio solidale e dunque determinare la posizione del sistema rigido, istante per istante, equivale a determinare la configurazione della terna solidale S rispetto a quella fissa Ω.
Quindi, si comprende come la velocità rispetto a Ω di un punto P di S dovrà esprimersi attraverso la velocità **v**(O) dell' origine O di S e di un altro vettore che esprima come variano nel tempo i versori solidali **i**(t), **j**(t) **e k**(t).

Come già osservato, essendo il versore un vettore di modulo costante la sua derivata rispetto al tempo è ortogonale al versore stesso (vedi formula (4.14), e quindi per i tre versori della terna fissa risulta :

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} \bullet \mathbf{i} = 0 \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} \bullet \mathbf{j} = 0 \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt} \bullet \mathbf{k} = 0 \tag{4.25}$$

Vale il seguente **:**

TEOREMA 4.1 In ogni moto rigido esiste uno e un solo vettore $\boldsymbol{\omega}$ dipendente solo dal tempo e non dalla scelta della terna solidale per cui risulta

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j} \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k} \tag{4.26}$$

Le (4.26) sono le cosiddette formule di Poisson di cui omettiamo la dimostrazione. E' immediato verificare che esse soddisfano le (4.25).
Le formule di Poisson sono fondamentali per la conoscenza del vettore velocità di un qualsiasi punto P del sistema rigido.
Consideriamo, infatti, il vettore posizione (P-O) del punto P nella terna solidale, essendo un vettore solidale, esso sarà di modulo costante in S. Si ha:

$$\mathbf{(P\text{-}O)} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\frac{dP}{dt} - \frac{dO}{dt} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + y\frac{d\mathbf{k}}{dt} = x\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i} + y\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j} + z\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{(P - O)}$$

$$\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(O) + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) \tag{4.27}$$

La formula (4.27) è detta ***formula fondamentale dei moti rigidi*** e i vettori **v**(O) **e** $\boldsymbol{\omega}$ sono detti ***vettori caratteristici*** del moto rigido, con riferimento al polo O è la formula più importante per lo studio della meccanica dei corpi rigidi.

Essa si può leggere dicendo che la velocità di un qualunque punto P di un rigido è nota non appena si conoscono la velocità di un qualsiasi altro punto prefissato del rigido $\mathbf{v}(O)$ e il vettore $\boldsymbol{\omega}$

Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ è detto ***velocità di rotazione*** della terna solidale S rispetto alla fissa Σ, infatti, in accordo con le (4.26), esso gode della seguente **proprietà**: *Condizione necessaria e sufficiente affinché i versori solidali siano costanti (rispetto a Σ) durante il moto è che sia* $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. In tal caso la terna solidale trasla rispetto alla terna fissa in quanto le direzioni dei versori degli assi rimangono costanti, paralleli a se stessi, e i moti rigidi sono detti traslazioni.

Dalla definizione di **moto composto** data nel paragrafo in precedenza possiamo dire che il più generale moto rigido dato da (4.27) è la composizione di un moto traslatorio di velocità $\mathbf{v}(O)$ e di un moto circolare di velocità $\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)$ (vedi formula (4.19)) .

Ne consegue che il più generale moto rigido è un moto rototraslatorio.

E' facile dimostrare che un moto descritto dalla (4.27) è un moto rigido. Infatti, siano P_1 e P_2 due punti del sistema il cui moto soddisfa la (4.27) allora risulta:

$$\mathbf{v(P_1)} = \mathbf{v(O)} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_1 - O) \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{v(P_2)} = \mathbf{v(O)} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_2 - O)$$

sottraendo membro a membro si ha

$$\mathbf{v(P_1) - v(P_2)} = \boldsymbol{\omega} \wedge (P_1 - P_2)$$

moltiplicando scalarmente ambo i membri della per $\mathbf{(P_1-P_2)}$ si ottiene:

$$[\, \mathbf{v(P_1) - v(P_2)} \,] \cdot \mathbf{(P_1-P_2)} = \mathbf{0} \qquad (4.28)$$

Si verifica immediatamente che la (4.28) corrisponde alla derivata rispetto al tempo della relazione:

$$\mathbf{(P_1-P_2)^2 = cost}$$

corrispondente alla condizione di rigidità.

Nota Bene

La legge di Poisson (4.27) di distribuzione delle velocità dei i punti del corpo rigido in un dato istante fornisce il cosiddetto atto di moto. Ad ogni punto dello spazio essa associa, in ogni istante, una velocità, e precisamente la velocità di quel punto materiale che, nell'istante considerato, si trova a passare per quel punto dello spazio. Questa descrizione è particolarmente utile nel caso del moto dei fluidi.

Questo modo di affrontare lo studio del moto di un sistema di particelle è detto *punto di vista euleriano,* che verrà utilizzato in queste Note, e consiste nell'analizzare lo stato dell'intero sistema (e non di una singola particella) in un istante fissato del tempo. A questo scopo si fissa uno *spazio di controllo* e si misurano nell'istante considerato le accelerazioni, le velocità e le posizioni delle particelle che *transitano* per lo spazio di controllo in **quell'istante.**

L'approccio euleriano si distingue da quello cosiddetto *lagrangiano* o molecolare che consiste invece nel seguire, istante per istante, una particella del sistema individuandone accelerazione, velocità e posizione (quindi traiettoria e legge oraria del moto) in ogni istante di un intervallo di tempo finito.
Ribadiamo che l'insieme dei vettori velocità (distribuzione delle velocità) euleriane, relative ad uno spazio di controllo e ad un certo istante di tempo, si dice **atto di moto** del sistema considerato.

4.5 Classificazione dei moti rigidi. Asse di Mozzi

E' molto interessante notare che la formula (4.27) è formalmente identica alla legge (2.3) di variazione del Momento Risultante di un sistema di vettori applicati al variare del polo:

$$\mathbf{M(P) = M(O) + (O-P) \wedge R}$$

o equivalentemente

$$\mathbf{M(P) = M(O) + R \wedge (P-O)}$$

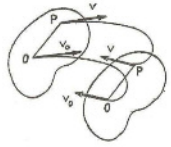
è formalmente identica a

$$\mathbf{v(P) = v(O) + \omega \wedge (P - O)}$$

ove si identifichi v(P) con M(P) , v(O) con M(O) e ω con il risultante R.
Quindi tutte le conseguenze dedotte per lo studio del modo di variare col polo del momento risultante di un sistema di vettori applicati possono essere applicate allo studio del modo di variare della velocità di un punto qualsiasi di un sistema rigido.

Quindi:

a) se $\boldsymbol{\omega = 0}$ risulta dalla (4.27) $\mathbf{v(P) = v(O)}$ $\forall$ **P** e cioè tutti i punti hanno lo stesso vettore velocità e quindi le tangenti alla traiettoria sono sempre parallele tra loro.
(Se **R**=0 , **M**(0) è indipendente dal polo O)
Dalle formule di Poisson risulta che i versori degli assi della terna solidale sono costanti nel tempo.
Le **traiettorie** descritte dai punti sono **tutte uguali** fra loro e tali che in ogni istante le tangenti a punti di esse sono parallele fra loro.
L'annullarsi di ω costituisce una condizione necessaria e sufficiente perché il moto sia **traslatorio**



b) $\boldsymbol{\omega \neq 0}$

Moltiplicando ambo i membri della (4.26) scalarmente per ω, risulta

$$\mathbf{v(P) \cdot \omega = v(O) \cdot \omega}, \quad \forall \mathbf{P} \qquad (4.29)$$

La (4.29) definisce il cosiddetto **invariante scalare cinematico.**
(analogo all'invariante scalare nel caso dei Sistemi di Vettori applicati)
E quindi il componente, $\mathbf{v}_\omega$, del vettore velocità nella direzione parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ è lo stesso per tutti i punti:

$$\mathbf{v}_\omega = [\mathbf{v}(O)\cdot\boldsymbol{\omega}]\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega^2} \quad , \quad \forall\, \mathbf{P} \qquad (4.30)$$

La (4.30) definisce il cosiddetto **invariante vettoriale cinematico.**
[$\mathbf{M}_\psi(O) = \frac{M\ Q)R}{R^2}R$ nel caso di un sistema di vettori applicati]

(Notiamo che che $\mathbf{v(O)}\cdot \mathbf{vers}\,\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v(O)}\cdot\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$ è **la** componente di $\mathbf{v(O)}$ lungo la direzione di $\boldsymbol{\omega}$ e quindi, per ottenere **il** vettore componente $\mathbf{v}_\omega$ devo moltiplicare ancora per $\mathbf{vers}\,\boldsymbol{\omega}$.)

Come nel caso della legge di variazione del Momento Risultante di un sistema di vettori applicati, si può dimostrare che se $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ **esiste una retta parallela ad** $\boldsymbol{\omega}$ i cui punti sono i punti del sistema rigido che hanno tutti la **stessa velocità parallela** ad $\boldsymbol{\omega}$ e data dal vettore $\mathbf{v}_\omega$.

Tale retta, luogo dei punti P con la stessa velocità parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ data dalla (4.30), è detta ***asse istantaneo di moto (o asse di Mozzi)*** di equazione (analoga alla (2.13)):

$$P\text{-}O = \frac{\boldsymbol{\omega}\wedge \mathbf{v}(O)}{\omega^2} + \lambda\boldsymbol{\omega} \qquad \lambda \in R \qquad (4.31)$$

Nel caso in cui **l'invariante scalare è nullo in un certo istante** i punti dell'asse di Mozzi sono istantaneamente **fermi**, in quanto $\mathbf{v}_\omega = 0$, e quindi l'asse di Mozzi si chiama **asse di istantanea rotazione**: tutti i punti al di fuori dell'asse appartengono a traiettorie circolari.
Infatti, se un punto O' appartiene a tale asse, risulta v(O') = 0 e quindi dalla formula fondamentale della velocità (4.26) si ha

$$\mathbf{v(P)} = \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{(P\text{-}O')} \quad \forall P \notin all'asse\ di\ Mozzi$$

corrispondente all'espressione (4.19) della velocità di P in un moto circolare.

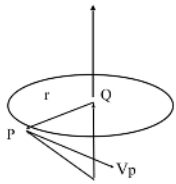
Quindi per un punto P non appartenente all'asse di moto, risulta

$$\mathbf{v}(P) = \boldsymbol{\omega}\wedge(P - Q + Q - O') = \boldsymbol{\omega}\wedge(P - Q)$$

con Q proiezione del punto P sull' asse di Mozzi di istantanea rotazione, essendo (Q-O') parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$.
Per l'ortogonalità di $\boldsymbol{\omega}$ e di (P-Q) risulta

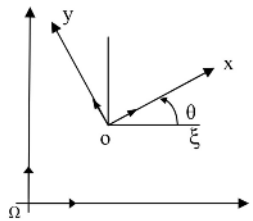
$$|\ \mathbf{v}(P)\ | = |\omega|\, r\, \mathrm{sen}\frac{\pi}{2} = |\omega|\, r \quad \text{con } r = |(P - Q)|$$

tipico del moto circolare



In tal caso diremo che **l'atto di moto è rotatorio** intorno all'asse di Mozzi all'istante *t* considerato (o che **il moto è rotatorio** per ogni *t* se la direzione di **ω** è costante).

Verifichiamo che in tal caso il vettore **ω** è esprimile tramite la derivata rispetto al tempo di un angolo come definito dalla (4.18)* nel moto circolare.
Se scegliamo l'asse z, di versore **k,** della terna solidale **coincidente con l'asse di Mozzi** e parallelo all'asse ζ, di versore e_3, della terna fissa e se denotiamo con $\theta(t)$ l'angolo tra i versori degli assi ξ *e* x, risulta:



$$\mathbf{i} = \cos\theta(t)\,\mathbf{e_1} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e_2},\quad \mathbf{j} = -\operatorname{sen}\theta(t)\mathbf{e_1} + \cos\theta(t)\mathbf{e_2},\quad \mathbf{k} = \mathbf{e_3}, \tag{4.32}$$

Le (4.32) possono essere scritte in forma matriciale come:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = A_\theta \begin{pmatrix} \mathbf{e_1} \\ \mathbf{e_2} \\ \mathbf{e_3} \end{pmatrix}$$

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Derivando rispetto al tempo il versore **i,** risulta:

$$\frac{\mathbf{di}}{dt} = \dot{\theta}(-\text{sen}\theta \mathbf{e}_1 + \cos\theta \mathbf{e}_2) = \dot{\theta}\,\mathbf{j}$$

e quindi $\frac{\mathbf{di}}{dt} \cdot \mathbf{j} = \dot{\theta}$

Sia $\boldsymbol{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$**, risulta**

$$\frac{\mathbf{di}}{dt} \cdot \mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i} \bullet \mathbf{j} = [\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}] \wedge \mathbf{i} \bullet \mathbf{j} = \omega_z$$

e quindi $\omega_z = \frac{\mathbf{di}}{dt} \cdot \mathbf{j} = \dot{\theta}$

Inoltre, poiché $\frac{d}{dt}\mathbf{k} = 0$, segue che $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k} = 0$ e cioè $\omega_x = \omega_y = 0$**, e quindi** $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{k}$.

Quindi la rotazione del sistema rigido avviene intorno alla retta solidale parallela a $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$, parallela alla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, cioè intorno all'asse di moto.

Nel caso in cui l'invariante scalare non sia nullo e $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$, i punti dell'asse di Mozzi hanno la stessa velocità $\mathbf{v}_\omega$ e quindi l'asse di Mozzi trasla su se stesso: l'atto di moto risulta allora essere **elicoidale** in quanto composto da un moto rettilineo per i punti appartenenti all'asse e uno circolare intorno ad esso per i punti fuori di esso**:**

$$\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}_\omega + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) \quad \forall O \in \text{all'asse e } P \notin \text{all'asse}$$

Più generalmente , se in un istante si ha $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ **si parla di atto di moto di rotazione quando** $I = \mathbf{v}(O) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$**, e di atto di moto elicoidale se** $I = \mathbf{v}(O) \cdot \boldsymbol{\omega} \neq 0$**.**

4.5.1 Un esempio di composizione di moti rigidi: moto di precessione

Un moto rigido si dice moto di precessione se esiste un punto O dello spazio solidale che si mantiene fisso durante il moto e inoltre esiste una retta solidale e con il corpo, e passante per O, che ruota attorno ad una retta fissa rispetto all'osservatore, formando con essa un angolo costante.

La retta fissa rispetto all'osservatore prende il nome di **asse di precessione** e la retta solidale con il corpo che forma un angolo costante con essa si dice **asse di figura.**
E' utile, in questo caso, scegliere le origini della terna solidale e O della terna dell'osservatore, coincidenti tra loro e nel punto fisso del moto. Identifichiamo l'asse solidale z con l'asse di figura e l'asse ζ con l'asse di precessione e sia θ l'angolo costante compreso .
Dalla definizione risulta

$$\cos\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3 = \text{costante}$$

e quindi derivando si ottiene

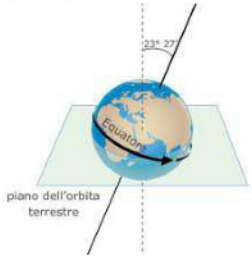
$$\mathbf{e}_3 \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

cioè i tre vettori sono complanari e quindi possiamo scrivere

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_p \mathbf{e}_3 + \omega_f \mathbf{k}$$

Questo risultato si può commentare nel modo seguente: **in un moto di precessione la velocità angolare è costituita da due componenti, di cui una lungo l'asse di precessione, ω_p $\mathbf{e_3}$, e l'altra lungo l'asse di figura, ω_f k.**
La prima componente, che abbiamo denotato con ω_p, prende il nome di velocità angolare di precessione e la seconda, denotata con ω_f, si dice velocità angolare di rotazione propria Un moto di precessione, poi, si dice regolare se ω_p e ω_f sono costanti.

La Terra possiede un moto di precessione: il suo asse di rotazione ruota lentamente (con un ciclo di 25.800 anni) intorno alla perpendicolare al piano della sua orbita, rispetto alla quale è inclinato di circa 23°27'



4.6 Moti rigidi piani. Centro di Istantanea Rotazione

Un moto rigido si dice piano se i vettori caratteristici del moto **v(O)** e **ω** sono tali che

1) ω ha direzione costante rispetto alla terna fissa.

2) v(O) · **ω** = 0 , v(O) ≠ 0

Quindi per la **1)** esiste un versore fisso (o solidale), scegliamo per esempio il versore dell'asse **k**, tale che **ω** ∧ **k** = **0** ad ogni istante di tempo. La seconda proprietà equivale a richiedere che la velocità di O, e quindi le velocità **di tutti i punti** del sistema rigido, siano normali alla direzione di **ω** e quindi appartengono a piani paralleli aventi tutti la stessa giacitura ortogonale ad **ω**
Infatti da

$$\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(O) + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)$$

moltiplicando scalarmente per **ω**, si ottiene

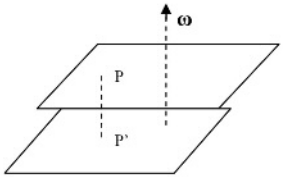
$$\mathbf{v}(P) \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$$

Inoltre, tutti i punti che si trovano su una retta parallela ad **ω** hanno la stessa velocità.

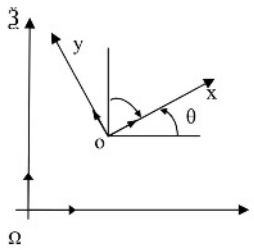
Infatti, siano P e P' due punti appartenenti ad una retta parallela ad **ω, allora risulta:**

$$\mathbf{v}(P) - \mathbf{v}(O) = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)$$
$$\mathbf{v}(P') - \mathbf{v}(O) = \boldsymbol{\omega} \wedge (P' - O)$$
$$\mathbf{v}(P) - \mathbf{v}(P') = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - P') \Rightarrow \mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(P')$$

Quindi, la velocità di ogni punto del corpo è uguale alla velocità della sua **proiezione** ortogonale su uno dei piani paralleli fra loro e ortogonali alla direzione di **ω** . In particolare quindi alla proiezione ortogonale sul piano solidale fisso ortogonale a **k**



Lo studio del moto è quindi riconducibile ad un problema in due dimensioni, ovvero allo studio del moto di una figura rigida piana nel suo piano.
Possiamo anche dire che un moto rigido si dice piano quando è possibile trovare un piano solidale con il corpo che, durante il moto, si mantiene parallelo ed ad un piano solidale con l'osservatore. Tale piano si definisce piano rappresentativo del moto.
Senza perdere di generalità, possiamo scegliere la terna solidale S e la terna fissa Σ con i piani $\zeta = 0$ e $z = 0$ coincidenti rispettivamente con il piano fisso e con il piano mobile, come in figura:



Poiché, come è evidente, nei moti rigidi piani risulta nullo l'invariante scalare

$$I = \mathbf{v}(O) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$$

e quindi, se $\omega \neq 0$ l'atto di moto è rotatorio intorno all'asse di Mozzi, asse di istantanea rotazione, i cui i punti hanno istantaneamente velocità nulla ($\mathbf{v}_\omega = [\mathbf{v}(O) \cdot \boldsymbol{\omega}]\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega^2} = \mathbf{0}$).
L'**intersezione** di tale asse con il piano rappresentativo del moto , si chiama **centro istantaneo di moto o centro istantaneo di rotazione , C,** per il quale risulta $\mathbf{v}(C) = \mathbf{0}$ all'istante considerato.

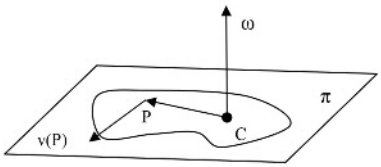
In generale, la posizione di **C** varia nel tempo; il luogo descritto da **C**, rispetto ad un osservatore fisso, e' detto la **base** del moto; lo stesso luogo, descritto da un osservatore solidale e' detto la **rulletta** del moto; si dimostra che base e rulletta hanno in comune nel punto C la tangente, e che la rulletta rotola senza strisciare sulla base.
La base e rulletta sono chiamate anche le polari del moto. Le polari caratterizzano il moto dal punto di vista geometrico.

Con riferimento al centro **C si ha:**

$$\mathbf{v(P)(t) = v(C)(t) + \omega(t) \wedge (P(t) - C(t)) = \omega(t) \wedge (P(t) - C(t))} \qquad (4.33)$$

e cioè vale il **Teorema di Chasles**: La retta perpendicolare alla traiettoria in P passa per il centro istantaneo di rotazione C(t) all'istante t considerato.

Nel caso di moti traslatori, cioè nel caso di $\omega = 0$, il punto C non è definito. Lo si individua solitamente come il punto improprio della direzione ortogonale alla velocità comune dei punti del piano solidale.



Da notare che la (4.33) ci dice anche che il generico spostamento rigido piano è considerato come rotazione attorno al centro C stesso e non più come spostamento roto-traslatorio

Nelle applicazioni, può essere utile determinare il centro **C** senza dover prima calcolare il moto, esempi:

(i) se esiste un punto fisso O, cioè se il moto è di precessione allora **C** coincide con O,

(ii) se sono note le direzioni, non parallele, delle velocità v(P) e v(Q) di due punti P e Q del sistema rigido, C è il punto di intersezione tra le perpendicolari a v(P) e v(Q) condotte per P e Q, in conseguenza del teorema di Chasles.

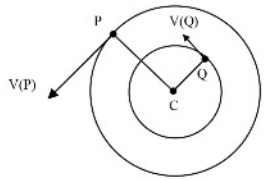


Figura 4.6 Conseguenza del Teorema di Chasles

4.7 Diagramma degli spostamenti elementari in un moto Rigido Piano

L'ipotesi *di piccoli spostamenti* consente di assumere che gli spostamenti siano così piccoli da poter ritenere infinitamente prossime le posizioni iniziale e finale occupate dal sistema rigido corpo. Conseguentemente, gli spostamenti sia traslatori che rotatori diventano *quantità infinitesime* che comportano notevoli semplificazioni nella descrizione del moto. Questa ipotesi è giustificata dal fatto che gli spostamenti delle strutture reali devono essere effettivamente limitati per garantire la funzionalità in esercizio delle strutture stesse, ad esempio, un solaio non deve subire inflessioni eccessive sotto l'azione del peso proprio e portato.
Dalla formula fondamentale del moto rigido, "moltiplicata" per l'intervallo di tempo infinitesimo dt:

$$\mathbf{v}(P)dt = \mathbf{v}(O)dt + \boldsymbol{\omega}dt \wedge (P - O)$$

otteniamo

$$dP = dO + d\boldsymbol{\omega} \wedge (P-O) \qquad (4.34)$$

definito come spostamento rigido elementare.

Nella (4.34), nel caso dei Moti Rigidi Piani, risulta $d\boldsymbol{\omega} = d\theta\,\mathbf{k}$, con **k** il versore dell'asse di istantanea rotazione.
Conoscendo le coordinate del centro assoluto di rotazione C e l'angolo di rotazione infinitesima $d\theta$ dello spostamento rigido piano di un qualunque sistema rigido è possibile conoscere lo spostamento di tutti i suoi punti.

Dalla (4.34) con $O \equiv C$ e quindi $d(O) = O$, risulta:

$$dP = d\theta\,[\,-(y_P - y_c)\mathbf{i} + (x_P - x_c)\mathbf{j}\,] \qquad (4.35)$$

avendo indicato con $d\theta$ la rotazione **infinitesima.**

E' interessante ricavare la relazione (4.35) mediante considerazioni geometriche che conducono alla costruzione del cosiddetto Diagramma degli Spostamenti. Nella **Figura** 4.7 sono evidenziati i diagrammi delle componenti cartesiane di uno spostamento del generico punto P di un rettangolo che ruota intorno al centro di istantanea rotazione C.

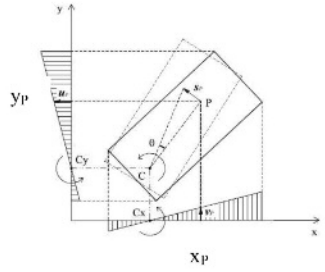


Figura 4.7 DIAGRAMMA degli Spostamenti

Sia P (x_P, y_P) un punto qualsiasi del rettangolo e $C(x_c, y_c)$ il centro di istantanea rotazione.
Nell'intervallo di tempo infinitesimo dt il punto P si è spostato in verso antiorario di $dP \equiv \mathbf{s}_P$ per effetto di una rotazione infinitesima intorno a C. La lunghezza del vettore $\mathbf{s}_P$ è l'archetto infinitesimo, $|PC|d\theta$, di circonferenza di centro C e raggio $|PC|$, che sottende l'angolo **infinitesimo** $d\theta$ **e** approssimato quindi dalla relativa corda.

Detti C_x e C_y i punti proiezione di C sull' asse x e sull'asse y rispettivamente, si vede chiaramente dalla figura che le componenti cartesiane del vettore spostamento $\mathbf{s_P}$ corrispondono agli archetti v_P e u_P descritti dalla rotazione del punto sull'asse x di coordinata x_P intorno al punto C_x , di coordinata x_C , e della rotazione del punto sull'asse y di coordinata y_P intorno al punto C_y di coordinata y_C.

In altre parole, è sufficiente proiettare il centro assoluto di rotazione del corpo sull'asse x (y) del riferimento adottato ottenendo il punto C_x (C_y) e, quindi, ruotare l'asse x (y) attorno a C_x (C_y) dell'angolo $d\theta$. Le ordinate e le ascisse degli assi ruotati forniscono le componenti cartesiane degli spostamenti dei punti del corpo .
Quindi

$dP \equiv \mathbf{s_P} = -u_P\mathbf{i} + v_P\mathbf{j}$, $u_P = |y_P - y_c|d0$ e $v_P - |x_P - x_c|d0$ e ritroviamo la formula (4.35).

Nota che abbiamo usato il fatto che $|y_P - y_c|$ è il raggio di rotazione di angolo $d\theta$ del punto di coordinata y_P sull'asse y intorno al punto C_y e analogamente per $|x_P - x_c|$.

La formula (4.35) è fondamentale nel calcolo delle reazioni vincolari esplicate su una trave quando si usa il Principio dei Lavori Virtuali.

4.8 Base e Rulletta

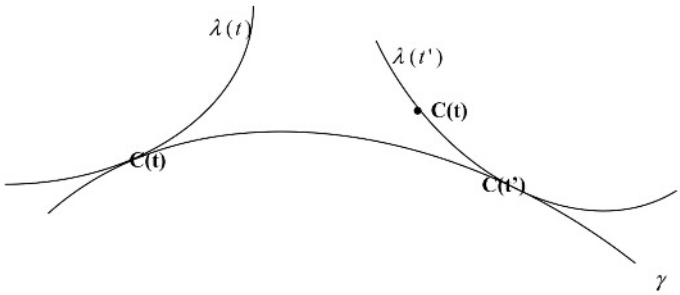
Al variare del tempo il Centro di Istantanea Rotazione C non è, generalmente, lo stesso, ma cambia in quanto, se in un istante t era un certo punto del corpo ad avere velocità nulla, in un istante successivo sarà, generalmente, un altro punto del corpo ad avere velocità nulla. Il centro coincide sempre con lo stesso punto del corpo solo se il corpo ruota attorno ad un asse fisso: in questo caso non solo l'atto di moto, ma il moto come tale è rotatorio e il centro fisso è l'intersezione dell'asse fisso con il piano del moto.
E' utile considerare, a questo punto, l'insieme di tutti i centri di istantanea rotazione al variare del tempo t. Tale insieme rappresenta un luogo geometrico caratterizzato dal parametro tempo, cioè una curva. Va sottolineato il fatto che si ottengono due curve distinte a seconda che si definisca tale luogo geometrico rispetto al sistema di assi dell'osservatore del moto del corpo oppure rispetto ad un sistema di assi solidali con il corpo stesso.

*Si dice **base** la curva descritta dal centro di istantanea rotazione rispetto al sistema dell'osservatore.*

*Si dice **rulletta** la curva descritta dal centro di istantanea rotazione rispetto al sistema solidale con il corpo.*

Le due curve sono tangenti in C durante il moto.

Dal punto di vista geometrico le due curve si possono pensare generate da C pensandolo come un punto geometrico che ha una sua individualità. Il centro C, come punto geometrico che descrive le due curve appena definite, si muove sia rispetto al sistema dell'osservatore (sistema assoluto), che rispetto al sistema solidale con il corpo (sistema relativo).



La base γ è una curva fissa rispetto all'osservatore, la rulletta $\lambda(t)$, solidale al piano mobile, rotola senza strisciare sulla base avendo come punto di contatto il centro C di istantanea rotazione ($v(C) = 0$).
In figura si vede che all'istante t', successivo a t, il punto C di contatto tra le due curve è cambiato e il precedente punto di contatto relativo all'istante t è ora in una diversa posizione sulla curva $\lambda(t')$. Abbiamo dunque un problema di cinematica relativa per il punto C **.

4.9 Richiami di Cinematica Relativa

Sia P un punto mobile sia rispetto al sistema di riferimento fisso $\Sigma(\Omega\,\xi\,\eta\,\zeta)$ che al sistema di riferimento S (Oxyz) mobile rispetto a Σ.
Si dice moto relativo il moto del punto P rispetto al sistema S. Indicate con (x, y, z) le coordinate del punto P nel sistema S, si chiama **velocità relativa**

$$\mathbf{v_R}(P) = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k}$$

Si chiama **velocità di trascinamento** la velocità di quel punto dello spazio solidale S su cui il punto P transita nel dato istante, e quindi:

$$\mathbf{v_T}(P) = \mathbf{v}(O) + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)$$

cioè, la velocità di trascinamento è data dalla formula fondamentale dei moti rigidi valida per lo spazio solidale S.

Se ora deriviamo il vettore posizione P-O = $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ rispetto alla terna fissa Σ, otteniamo

$$\frac{d\ (P-O)}{dt}=\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k}+x\frac{d\mathbf{i}}{dt}+y\frac{d\mathbf{j}}{dt}+z\frac{d\mathbf{k}}{dt}=\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k}+\boldsymbol{\omega}\wedge(P-O)$$

e quindi

$$\mathbf{v}(P)-\mathbf{v}(O)=\mathbf{v}_R(P)+\boldsymbol{\omega}\wedge(P-O)\ \Longrightarrow\ \mathbf{v}(P)=\mathbf{v}_R(P)+\mathbf{v}_T(P)$$

cioè, vale il Teorema di composizione delle velocità o Teorema di addizione delle velocità o teorema di Galileo:

la velocità assoluta è la somma della velocità relativa più quella di trascinamento.

Dove,ripetiamo, si intende per velocità di trascinamento la velocità del punto P come se nell'istante considerato fosse solidale con la terna relativa S.
Derivando successivamente $\mathbf{v}_R(P)$ e $\mathbf{v}_T(P)$ si ottengono l'accelerazione relativa e l'accelerazione di trascinamento:

$$\mathbf{a}_R(P)=\ddot{x}\mathbf{i}+\ddot{y}\mathbf{j}\cdot+\ddot{z}\mathbf{k}$$

$$a_T(P)=a(O)+\dot{\omega}\wedge(P-O)+\omega\wedge[\omega\wedge(P-O)]$$

E quindi, derivando rispetto al tempo due volte il vettore P-O rispetto alla terna fissa si verifica che vale il Teorema di Coriolis che esprime l'accelerazione assoluta di P

$$a(P)=a_R(P)+a_T(P)+2\omega\wedge v_R(P)$$

il termine

$$a_C(P)=2\omega\wedge v_R(P)$$

è detto accelerazione complementare o di Coriolis che non è presente se la velocità relativa è nulla
*****

QUINDI, essendo il punto C, di istantanea rotazione, mobile sia rispetto alla terna fissa che a quella solidale mobile, dal Teorema di Galileo avremo:

$$v(C)=v_R(C)+v_T(C)$$

ma poiché per definizione di velocità di trascinamento risulta $v_T(C)=0$, essendo il centro quel punto del corpo che nell'istante considerato coincide con C e questo ha velocità nulla, segue

$$v(C)=v_R(C)$$

e quindi le due curve in C hanno la stessa tangente. Inoltre, avendo lo stesso spostamento elementare $v(C)dt = v_R(C)dt$ non possono strisciare l'una sull'altra. Si dice quindi che in un moto

rigido piano la rulletta rotola **senza strisciare** sulla base fissa e che il centro di istantanea rotazione C è istante per istante il loro punto di contatto (punto di tangenza). Base e rulletta si dicono anche *traiettorie polari* del moto rigido piano.

Esempio 4.4 Disco che rotola senza strisciare su una guida rettilinea
Si consideri un disco di raggio R e circonferenza γ che si muove rigidamente su un piano, rotolando senza strisciare sopra una guida rettilinea del piano. **L'assenza di strisciamento implica che il punto di contatto C tra il disco e la guida rettilinea abbia velocità nulla e quindi per ogni punto del disco $Q \neq C$ risulta $\mathbf{v(Q)} = \boldsymbol{\omega} \wedge (Q - C)$,** cioè, tutti punti del disco ruotano con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ intorno ad un asse di istantanea rotazione di direzione costante perpendicolare al piano del disco e passante per C. Il punto C è dunque il centro di istantanea rotazione.
Nell'istante considerato è come se il disco ruotasse intorno al punto C, ma questo solo per un istante, perché nell'istante successivo il centro istantaneo C si è spostato sulla guida.
Nella Figura 4.8 è stato indicato con r il raggio di rotazione di un generico punto Q del disco intorno a C(t), centro di istantanea rotazione all'istante t.
Il moto rigido in esame è quindi rigido piano. L'asse di istantanea rotazione trasla parallelamente a se stesso e parleremo quindi di atto di moto rotatorio.

Durante il moto il centro istantaneo di rotazione C percorre la guida rettilinea nel sistema di riferimento fisso, invece nel sistema di riferimento solidale il punto C percorre la circonferenza γ di raggio R. Quindi la guida rettilinea è la **base** mentre la circonferenza è la **rulletta.** Se si studia la traiettoria di un punto del disco, ogni punto P sulla circonferenza γ del disco descrive una cicloide, tale moto pertanto si chiama *cicloidale*.

****la cicloide è una curva piana tracciata da un punto fisso su una circonferenza che *rotola* lungo una retta. Le dimensioni di una cicloide sono strettamente legate a quella della **circonferenza generatrice**:

1. L'altezza massima dell'arco è pari al suo diametro
2. La lunghezza di un arco di cicloide è 4 volte il diametro ovvero 4 volte l'altezza
3. La base sottostante l'arco è pari alla lunghezza della circonferenza
4. L'area compresa fra un arco di cicloide e la base è 3 volte l'area del cerchio ****

Da notare che questo è il moto realizzato comunemente dalle ruote dei veicoli su strada piana quando lasciano su di essa tracce rettilinee

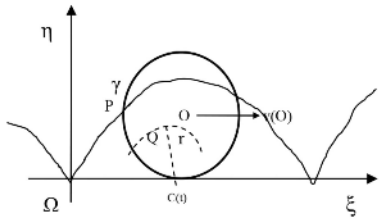


Figura 4.8

Ogni punto interno alla circonferenza γ descrive una cicloide accorciata, mentre ogni punto esterno a γ, cioè ogni punto esterno a γ e appartenente al piano solidale che ruota insieme alla rulletta, descrive una cicloide allungata.

Esempio 4.5 Moto di un'asta con gli estremi che si muovono su due assi ortogonali

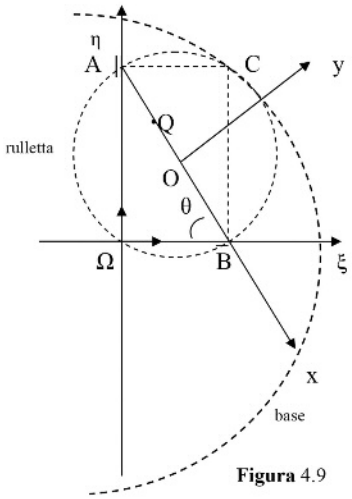
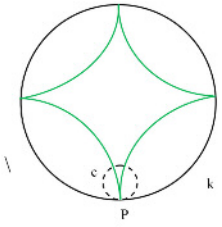


Figura 4.9

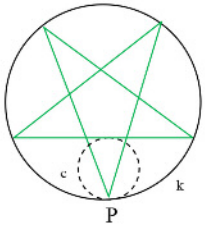
Consideriamo un'asta rigida AB di lunghezza *l* che è libera di muoversi in un piano, con gli estremi vincolati a due guide lisce rettilinee ortogonali lisce rappresentate dagli assi ξ ed η di una terna fissa Σ di assi cartesiani di origine Ω. E' manifestamente un moto rigido piano. Il centro di istantanea rotazione C(t), grazie al Teorema di Chasles, si troverà nel punto di intersezione delle rette ortogonali a tali assi nei punti A e B. Per determinare la rulletta e la base bisogna individuare le posizioni di C(t) rispetto al piano fisso e al piano mobile xy. Poiché **qualunque sia la posizione** dell'asta l'angolo $A\hat{C}B$ è retto ne consegue che il triangolo ACB è inscritto in una circonferenza di diametro AB e cioè di raggio l/2 *l*. Quindi nel piano xy solidale all'asta il luogo dei punti C, centri di istantanea rotazione, è la **circonferenza di raggio *l*/2 che rappresenta quindi la rulletta del moto**.
Analogamente, per ogni posizione di C il quadrilatero Ω ACB per avere 2 angoli opposti retti, in C e in Ω, è un rettangolo e quindi è inscrivibile in una circonferenza avente come centro il punto d'intersezione delle diagonali e passante per i vertici. Essendo le diagonali uguali risulterà durante il moto $\Omega C = AB = l$, essendo l'asta rigida, e quindi, rispetto alla terna fissa il luogo dei punti descritto da C è una **circonferenza di raggio *l* che rappresenta quindi la base del moto**.

Il moto descritto dal rotolamento senza strisciamento di una circonferenza sulla parte interna di un'altra circonferenza di raggio doppio è un particolare moto detto ipocicloidale (alla base dello schema di funzionamento del "giunto di Holdam")

****L'ipocicloide infatti è definita come la curva descritta da un punto P rigidamente collegato a una circonferenza tangente internamente a un cerchio fisso che rotoli senza strisciare su di essa (una circonferenza che rotola sulla parte interna di un'altra circonferenza). Se il rapporto del raggio della circonferenza esterna su quello dell'interna *a/b* è un numero razionale l'ipocicloide è una curva chiusa con *a/b* cuspidi. Se invece *a/b* è un numero irrazionale la curva non si chiude mai.



m/n=1/4



m/n=2/5

****

Nel caso particolare di *a/b* = 2, come nel moto dell'asta, il matematico Cardano (1500) dimostrò che la curva descritta dal punto di tangenza C di Figura 4.9 è una retta. Grazie a questa proprietà, un dispositivo formato da due ruote circolari, una interna all'altra, accoppiate in modo che la ruota di raggio R ruoti senza strisciare su quella di raggio 2R può servire **a trasformare un moto di rotazione in uno rettilineo.** Inoltre si può dimostrare che ogni punto Q dell'asta descrive **un'ellisse** (ellissografo, compasso ellittico) di semiassi di lunghezze QA e QB**.**

Esempio 4.6 Vettore velocità e traiettoria di un punto dell'asta dell'esempio 4.5.
Determiniamo, servendoci della formula fondamentale della cinematica rigida (4.37), la velocità di un punto Q dell'asta AB di Figura 4.9 e verifichiamo che esso descrive un'ellisse.

Con riferimento al centro C si ha

$$\mathbf{v}(Q) = \boldsymbol{\omega} \wedge (Q - C)$$

con $\boldsymbol{\omega} = -\dot{\theta}\,\mathbf{k}$, $C(\,l\cos\theta\,,\,l\,\mathrm{sen}\theta\,)$, $QB = h$ distanza di Q dall'estremo B , $Q((l\text{-}h)\cos\theta,\ h\mathrm{sen}\theta)$,

$(Q\text{-}C) = -h\cos\theta\ \mathbf{e}_1 + (h\text{-}l)\,\mathrm{sen}\theta\,\mathbf{e}_2$

E quindi,

$$\mathbf{v}(Q) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\dot{\theta} \\ -h\cos\theta & (h-l)\,\mathrm{sen}\theta & 0 \end{pmatrix} = \dot{\theta}\,(h-l)\,\mathrm{sen}\theta\,\mathbf{e}_1 + \dot{\theta}\,h\cos\theta\,\mathbf{e}_2$$

Da notare che il sistema rigido asta della figura 4.9 è ad un grado di libertà e si può scegliere θ come coordinata lagrangiana che andrà determinata assegnando il moto del punto B

(ad esempio $x_B = v_0 t$, e cioè velocità assegnata costante e uguale a $v_0 > 0$, da cui si ottiene

$x_B = l\cos\theta = v_0 t,\ \theta(t) = \arccos\dfrac{v_0 t}{l}$ e $\dot{\theta} = -\dfrac{v_0}{\sqrt{l^2 + (v_0 t)^2}}$)

Per determinare la traiettoria di Q , essendo le sue coordinate rispetto al sistema fisso $\Sigma(\Omega\ \xi\ \eta\ \zeta)$,

$$\xi_Q = (l\text{-}h)\cos\theta,\quad \eta_Q = h\,\mathrm{sen}\theta$$

si ha quindi

$$\frac{\xi_Q^{\,2}}{(l-h)^2} + \frac{\eta_Q^{\,2}}{h^2} = 1$$

Che è l'equazione di una ellisse con centro in Ω e semiassi (l-h) e h, da cui il nome ellissografo dato al sistema considerato.

In particolare si avrà una circonferenza se Q è il punto medio dell'asta.

5. VINCOLI OLONOMI DIPENDENTI DAL TEMPO. SPOSTAMENTI VIRTUALI. PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Nel caso di vincolo olonomo, liscio e bilatero la reazione vincolare corrispondente risulta ortogonale allo spostamento e quindi il lavoro fatto da essa risulta nullo. Ribadiamo che, rimanendo in ambito statico, gli spostamenti considerati sono infinitesimi. Se il vincolo può spostarsi nel tempo la situazione si complica in quanto si deve anche considerare l'effetto dovuto al trascinamento del vincolo. Viene in nostro aiuto il concetto di *spostamento virtuale* e il *Principio dei Lavori Virtuali* che fa intervenire solo forze attive ma che, **mediante un opportuno accorgimento**, fornisce un potente metodo di calcolo delle reazioni vincolari.

5.1 Spostamenti reversibili e irreversibili. Spostamenti virtuali

Riprendiamo ed estendiamo le nozioni sui vincoli viste nel capitolo 3 relativo alla Statica dei sistemi rigidi.
Ricordiamo che si dice **olonomo** un vincolo sulla sola posizione di un punto caratterizzabile mediante equazioni e/o disequazioni (anolonomo se il vincolo limita anche velocità e/o accelerazione)
Le relazioni vincolari viste fino ad ora sono state espresse da uguaglianze. In questo caso i vincoli vengono detti **bilateri**.
Ma possiamo avere anche relazioni espresse da disuguaglianze del tipo $f(x,y,z) \geq 0$ (o anche $f(x,y,z) \leq 0$), come visto nell'esempio 3.6.
I vincoli fissi unilaterali, conducono a introdurre una ulteriore distinzione nella classificazione degli spostamenti. Si tratta della distinzione fra spostamento **reversibile** e spostamento **irreversibile**:
uno spostamento possibile, cioè compatibile con i vincoli, si dice reversibile se lo spostamento opposto a partire dalla stessa configurazione è possibile. In caso contrario lo spostamento si dice irreversibile.
Se consideriamo ad esempio un punto P vincolato dalla disequazione $x^2 + y^2 \geq R^2$ e che si trova nella posizione di confine come in figura 5.1, allora gli spostamenti dP e - dP tangenti alla circonferenza sono reversibili. Mentre lo spostamento rivolto verso l'esterno è irreversibile in quanto l'opposto, che porterebbe il punto all'interno del disco, non è compatibile con la disequazione vincolare.

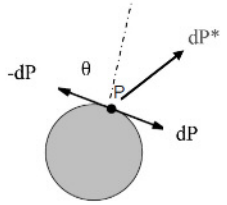
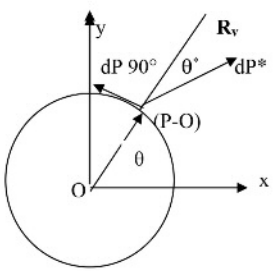


Figura 5.1 Spostamento elementare reversibile, irreversibile

Nota che l'angolo θ, tra la direzione **della retta ortogonale** alla circonferenza in P e lo spostamento elementare reversibile dP, è di **90°** mentre l'angolo con lo spostamento elementare irreversibile **dP*** è **acuto.**
Ricordiamo che l'azione esercitata dal vincolo è esprimibile mediante una forza detta reazione vincolare che, nel caso di vincoli lisci, ha direzione ortogonale allo spostamento.

Esempio 5.1 Lavoro della Reazione Vincolare. Caso di un vincolo unilatero

Sia il moto del punto P vincolato dalla disequazione $x^2 + y^2 \geq R^2$. Indicando con O l'origine della circonferenza di raggio R, fissato un riferimento cartesiano Oxyz, il punto P(x,y) su di essa avrà coordinate polari (vedi (1.7) del paragrafo 1.3):



$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad (P\text{-}O) = R\cos\theta\,\mathbf{i} + R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$$

$$\theta = \theta(t)$$

Figura 5.2 Spostamenti reversibili e irreversibili

Lo spostamento reversibile **dP, tangente al vincolo (**vedi (4.10)**),** risulta ortogonale al raggio. Infatti:

$$(P - O)\cdot dP = R(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})\, d\theta R\ (-\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}) = d\theta R^2(-\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta) = 0$$

Essendo il vincolo liscio, la reazione vincolare $\mathbf{R_v}$ **è per definizione** (vedi paragrafo 3.3) anch'essa ortogonale alla circonferenza (alla retta tangente alla circonferenza) e quindi per il parallelismo tra vettori (vedi (1.18)) potremo scrivere

$$\mathbf{R_v} = \lambda\mathbf{vers}(P - O)\ ,\ \lambda \in R \qquad (5.1)$$

e quindi risulta

$$\mathbf{R_v}\cdot\mathbf{dP} = \mathbf{0}. \qquad (5.2)$$

Nota che , invece, per lo spostamento irreversibile **dP*** di Figura 5.2 risulta $\mathbf{R_v}\cdot\mathbf{dP^*} > \mathbf{0}$ in quanto l'angolo θ^* è acuto. Infatti.

$$\mathbf{R_v}\cdot\mathbf{dP^*} = \left|\mathbf{R_v}\right|\left|\mathbf{dP^*}\right|\cos\theta^* > 0 \qquad (5.3)$$

In generale si può affermare che il lavoro elementare della reazione vincolare, $dL = \mathbf{R_v}\cdot\mathbf{dP}$, **non è mai negativo se il vincolo è liscio.**

E' evidente che per un vincolo bilatero e fisso ogni spostamento elementare è reversibile.

I vincoli possono anche dipendere esplicitamente dal **tempo,** in tal caso la relazione vincolare per un vincolo bilatero assume la forma $f(x(t),y(t),z(t);t) = 0$ (la dipendenza implicita è nelle coordinate che sono funzioni del tempo).
In tale caso faremo una ulteriore distinzione tra gli spostamenti elementari.

Esempio 5.2 Vincolo dipendente dal tempo. Spostamento Virtuale.

Prendiamo, per semplicità, il caso di un vincolo che lascia un solo grado di libertà.
Sia il punto P vincolato a muoversi sulla circonferenza il cui raggio a(t) è variabile nel tempo.

$$f(x(t),y(t);t) = x^2(t) + y^2(t) - a^2(t) = 0$$

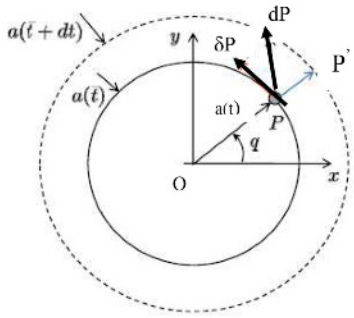


Figura 5.3 Vincolo dipendente dal tempo

Fissato un sistema di cartesiano Oxyz, la posizione di P è determinata, in base alle coordinate polari di anomalia q e raggio vettore a(t), da

$$P - O = (x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}) = a(t)(\cos q(t)\mathbf{i} + \text{sen}q(t)\mathbf{j})$$

Nota che la dipendenza esplicita dal tempo t è rappresentata dal termine a(t) e q è la coordinata Lagrangiana angolo.

Il vettore velocità del punto P sarà allora , per la regola di derivazione **del prodotto,**

$$\mathbf{v}(P) = a(t)(-\text{sen}q(t)\mathbf{i} + \cos q(t)\mathbf{j})\dot{q} + \dot{a}(t)(\cos q(t)\mathbf{i} + \text{sen}q(t)\mathbf{j})$$

Quindi per lo spostamento elementare avremo

$$\mathbf{dP} = a(t)dq(-\text{sen}q(t)\mathbf{i} + \cos q(t)\mathbf{j}) + \dot{a}(t)dt(\cos q(t)\mathbf{i} + \text{sen}q(t)\mathbf{j})$$

Per quanto visto in precedenza , il primo termine della somma

$$a(t)dq(-\text{sen}q(t)\mathbf{i} + \cos q(t)\mathbf{j})$$

è lo spostamento tangente alla circonferenza di raggio a(t) all'istante t che denoteremo con $\delta\mathbf{P}(t)$ come in figura.

Analizziamo il secondo termine:

$$\dot{a}(t)dt(\cos q(t)\mathbf{i} + \text{sen}q(t)\mathbf{j}) = da(\cos q(t)\mathbf{i} + \text{sen}q(t)\mathbf{j}) =$$

$$[a(t+dt) - a(t)](\cos q(t)\mathbf{i} + \text{sen}q(t)\mathbf{j}) = a(t+dt)(\cos q(t)\mathbf{i} + \text{sen}q(t)\mathbf{j}) - a(t)(\cos q(t)\mathbf{i} + \text{sen}q(t)\mathbf{j}) =$$

$$= (P'-O) - (P-O) = (P'-P)$$

dove" da " è il differenziale della funzione a(t)

Esso corrisponde al vettore (P'-P) differenza tra il vettore posizione (P'-O) di P sulla circonferenza di raggio a(t+dt) e il vettore posizione (P-O) di P sulla circonferenza di raggio a(t). Esso rappresenta, come è facilmente intuibile, l'effetto di **trascinamento** sul punto P dovuto al moto del vincolo.
Quindi lo spostamento elementare possibile **dP** sarà espresso dalla somma dei due vettori:

$$\mathbf{dP} = \delta\mathbf{P}(t) + (P'-P) \qquad (5.4)$$

Nella Figura 5.3, mediante la regola del parallelogramma, è evidenziato il vettore somma dei due vettori componenti.
Il primo termine viene definito **spostamento virtuale** e si denota usando il simbolo δ . Esso rappresenta lo spostamento infinitesimo che tiene conto dei vincoli all'istante t come se poi non variassero più da quell'istante in poi. E' cioè lo spostamento infinitesimo compatibile coi vincoli "**congelati al tempo t**".
Quindi, nel nostro esempio

$\delta P(t) = a(t)dq(-\text{sen}q\mathbf{i} + \cos q\mathbf{j})$ è lo **spostamento virtuale (**tangente al vincolo in P all'istante t**).**

Se il vincolo è indipendente dal tempo allora lo spostamento elementare dP coincide con lo spostamento virtuale δP.

Nota
Il semplice esempio considerato illustra chiaramente i concetti di spostamento virtuale ed effetto di trascinamento del vincolo. Volendo generalizzare questi concetti e definizioni al caso di una qualsiasi superficie vincolare occorre utilizzare nozioni sul calcolo differenziale di funzioni di più variabili che, per completezza, vengono di seguito riportate solo brevemente poiché il corso a cui queste dispense si riferiscono è incardinato al I anno, e quindi antecedente al corso di Analisi Matematica 2, dove solitamente vengono trattati questi argomenti.

5.4 Approfondimento su relazioni vincolari

Supponendo che le funzioni che caratterizzano i vincoli siano differenziabili, i vincoli per le posizioni si traducono anche in vincoli per gli spostamenti **dP** del punto.

Infatti, nel caso di **vincolo fisso** espresso dall'equazione f(P(x,y,z)) =0 allora quando il punto si è spostato nella posizione P + dP, che sia compatibile con il vincolo, deve risultare anche che f(P + dP)=0 e quindi

$$df = f(P + dP) - f(P) = 0$$

Dalla definizione di **differenziale totale** di una funzione di 3 variabili reali otteniamo quindi:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0 \iff \text{grad } f \cdot dP = 0$$

dove

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \quad \text{e} \quad dP = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

(per l'operatore grad si può anche usare la notazione ∇)

Essendo il **gradiente di f un vettore ortogonale alla superficie** f(P)=0, cioè al piano tangente alla superficie in P, ne segue che gli spostamenti elementari d**P possibili**, cioè **compatibili** con il vincolo fisso, sono **vettori appartenenti al piano tangente alla superficie** espressa dall'equazione vincolare nel punto P, essi cioè formano un angolo di 90° con il vettore gradf (ritroviamo il risultato dell'esempio precedente sul punto vincolato ad una circonferenza il cui spostamento elementare è tangente ad essa.)

Se il vincolo fisso è espresso da una disuguaglianza $f(x,y,z) \geq 0$ non nasce nessuna limitazione per gli spostamenti che soddisfano la disuguaglianza stretta, dal momento che gli spostamenti sono infinitesimi e la disuguaglianza stretta continuerà ad essere verificata anche dopo aver incrementato di un infinitesimo le coordinate del punto; mentre nascono delle limitazioni per gli spostamenti quando si parte da un **punto di frontiera** (posizione di confine), per cui risulta

$$f(P) = 0 \text{ e } f(P + dP) > 0$$

quindi

$$df = \text{gradf} \cdot dP \geq 0 \quad \text{cioè} \quad |\text{gradf}||dP|\cos\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \text{ è un angolo acuto o al più retto}$$

come si vede dalle Figure 5.2 e 5.3.

Quindi, gli spostamenti consentiti dal vincolo formano un angolo acuto o retto con il vettore gradf

(Discorso analogo se $f(x,y,z) \leq 0$ ma questa volta l'angolo è ottuso)

Infine, quando i vincoli sono espressi da funzioni che dipendono **esplicitamente** dal tempo (evidentemente la dipendenza implicita è nelle coordinate che sono funzioni del tempo), faremo una ulteriore distinzione tra gli spostamenti elementari.

Per uno spostamento elementare compatibile con il vincolo dipendente dal tempo, risulta:

$$df = f(P + dP; t) - f(P; t) = 0 \text{ cioè } \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0 \iff \text{gradf} \cdot dP + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0$$

dove il termine $\frac{\partial f}{\partial t}dt$ tiene conto dell'effetto di ***trascinamento*** del vincolo sulla posizione di P.

Indicando con q (t) la generica coordinata Lagrangiana relativa alla posizione del punto P (q(t),t) nel caso di un vincolo che lascia un solo grado di libertà grado di libertà, oppure $P = P(q_1(t), q_2(t), t)$

nel caso di 2 gradi di libertà , la velocità si otterrà derivando rispetto al tempo questa funzione composta di più variabili e quindi:

$$\mathbf{v(P)} = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

oppure

$$\mathbf{v(P)} = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial P}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial P}{\partial t}$$

Quindi dalla velocità otteniamo lo **spostamento infinitesimo possibile** che tiene conto dei vincoli e della loro eventuale dipendenza dal tempo:

$d\mathbf{P}(q; t) = \frac{\partial P}{\partial q}dq + \frac{\partial P}{\partial t}dt$ nel caso di vincolo che lascia un grado di libertà

$d\mathbf{P}(q_1,q_2;t) = \frac{\partial P}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial P}{\partial t}dt$ nel caso di vincolo che lascia 2 gradi di libertà

Richiamando i risultati dell'esempio 5.3, dove il punto P è vincolato a muoversi sulla circonferenza di raggio a(t) variabile nel tempo (un solo grado di libertà),

$$P - O = \left(x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}\right) = a(t)\left(\cos q\mathbf{i} + \operatorname{sen} q\mathbf{j}\right)$$

valendo la relazione

$$dP(q; t) = \frac{\partial P}{\partial q}dq + \frac{\partial P}{\partial t}dt$$

il suo spostamento possibile elementare sarà allora

$$dP(q,t) = a(t)\left(-\operatorname{sen} q\mathbf{i} + \cos q\mathbf{j}\right)dq + \dot{a}(t)dt\left(\cos q\mathbf{i} + \operatorname{sen} q\mathbf{j}\right)$$

e quindi identificheremo con $\frac{\partial P}{\partial q}dq$ lo spostamento virtuale e con $\frac{\partial P}{\partial t}dt$ l'effetto di trascinamento del vincolo. Fine approfondimento.

Nel linguaggio degli spostamenti virtuali possiamo dire che il **lavoro virtuale** delle reazioni vincolari, in presenza di un vincolo privo di attrito, è sempre non negativo, qualunque sia lo spostamento virtuale considerato.

$$\delta L = R_v \cdot \boldsymbol{\delta P} = \left|R_v\right|\left|\delta P\right|\cos\theta \geq 0 \quad \forall\left|\delta P\right|, \qquad (5.5)$$

Infatti, essendo il vincolo liscio, la reazione $\mathbf{R}_v$ è perpendicolare a $\boldsymbol{\delta P}$ e quindi nel caso di spostamenti reversibili tangenti al vincolo risulta:

$\delta L = R_v \cdot \boldsymbol{\delta P} = 0$ **(vera anche per lo spostamento opposto – $\boldsymbol{\delta P}$)**

Nel caso di spostamenti non reversibili (vincolo unilatero) risulta

$$\delta L = \mathbf{R}_v \cdot \delta \mathbf{P} > 0 \quad \forall\ \delta \mathbf{P}$$

in quanto lo spostamento **non invertibile δP,** di distacco dalla superficie e diretto verso la banda accessibile del vincolo, forma sempre un **angolo acuto** con la direzione di $\mathbf{R}_v$, per cui il prodotto scalare è positivo.

Osserviamo che il ricorso al lavoro virtuale, anziché al lavoro possibile è una semplificazione per il fatto che i lavori virtuali non tengono conto delle eventuali variazioni dei vincoli nel tempo.

In conclusione si può dire:

«Per un punto materiale soggetto a vincoli lisci, le reazioni vincolari sono tali che il lavoro da esse compiuto per ogni spostamento virtuale è sempre non negativo. Precisamente tale lavoro è nullo per ogni spostamento virtuale reversibile, mentre è positivo per ogni spostamento virtuale non reversibile»

5.2 Principio dei Lavori Virtuali (PLV)

Consideriamo un sistema di N punti materiali Pi (i = 1, 2, ...,N), di massa m_i soggetti a vincoli olonomi, lisci, espressi da disequazioni, indichiamo con $\mathbf{F}_i$ e con $\mathbf{R}_{vi}$ le forze attive e le reazioni vincolari applicate ai punti P_i , con δP_i i loro spostamenti virtuali. Estendendo i risultati dell'Esempio 5.1 al caso di un sistema di N punti si ha che il lavoro virtuale compiuto dalle reazioni vincolari soddisfa la relazione:

$$\delta L_{vmc} = \sum_{i=1}^{N} \delta L_{vi} = \sum_{i=1}^{N} R_{vi} \cdot \delta P_i \geq 0 \quad \forall \delta P_i \tag{5.6}$$

E quindi possiamo dire che**:**

In un sistema meccanico a vincoli olonomi e lisci, le reazioni vincolari sono tali che il lavoro da esse compiuto, per ogni spostamento virtuale, è sempre non negativo. Precisamente tale lavoro è nullo per ogni spostamento virtuale reversibile, mentre è positivo per ogni spostamento virtuale non reversibile.

Non è superfluo rilevare a questo proposito come il **vincolo di rigidità, espresso dalle** (3.18), **sia olonomo, fisso e bilatero.**

Dalle equazioni di moto relative ad un sistema di punti materiali

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_{vi}$$

otteniamo che quando il sistema è in una **configurazione di equilibrio**, $\mathbf{a_i = 0}$, risulta

$$\mathbf{F_i} = -\mathbf{R}_{vi} \qquad (5.7)$$

e quindi moltiplicando per gli spostamenti virtuali δP_i *e* sommando i contributi di tutti i punti materiali

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F_i} \cdot \delta P_i = -\sum_{i=1}^{N} R_{vi} \cdot \delta P_i$$

si ottiene

$$\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta P_i \le 0 \qquad \forall \delta P_i \quad \textit{relazione simbolica della statica} \qquad (5.8)$$

E nel caso di vincoli bilateri

$$\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta P_i = 0 \qquad \forall \delta P_i \quad \textit{equazione simbolica della statica} \qquad (5.9)$$

Si può dimostrare che vale il seguente

Principio dei lavori virtuali: ***Per ogni sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi e lisci, condizione necessaria e sufficiente per l' equilibrio è che il lavoro virtuale delle forze attive applicate al sistema sia non positivo, per ogni spostamento virtuale del sistema***

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta P_i \le 0 \qquad \forall \delta P_i \qquad (5.10)$$

L'uguaglianza essendo valida nel caso di spostamenti reversibili (vincoli bilateri).

Nota che nel caso di un sistema rigido libero, poiché il più generale spostamento virtuale è reversibile e ha la forma

$$\delta P = \delta O + \delta \boldsymbol{\omega} \wedge (P\text{-}O),$$

otteniamo

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta P_i = \mathbf{F} \cdot \delta O + \mathbf{M}(O) \cdot \delta \boldsymbol{\omega} = 0 \qquad \forall \delta O \text{ e } \forall \delta \boldsymbol{\omega} \qquad (5.11)$$

con $\mathbf{F}$ e $\mathbf{M}$ risultante e momento risultante delle forze attive.

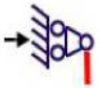
Da quest'ultima relazione seguono facilmente le equazioni **cardinali della statica per un corpo rigido libero**, infatti, da(5.10) **valida** $\forall \delta O$ e $\forall \delta \boldsymbol{\omega}$, *segue:*

$$\text{se } \delta O = 0 \text{ allora } \mathbf{M}(O) \cdot \delta \boldsymbol{\omega} = 0 \ \ \forall \delta \omega \Rightarrow \mathbf{M}(O) = O$$
$$\text{se } \delta \omega = 0 \text{ allora } \quad \mathbf{F} \cdot \delta O = 0 \ \ \forall \delta O \Rightarrow \mathbf{F} = O$$

Questo è il motivo per cui la (5.9) viene chiamata Equazione Simbolica della Statica.

5.3 Applicazione del PLV al calcolo delle reazioni vincolari nelle strutture isostatiche

E' noto che una struttura costruttiva deve essere ancorata mediante vincoli fissi. Quando questi sono in numero strettamente sufficiente a garantire l'equilibrio della struttura si dice che la struttura è isostatica.
Come già visto nelle applicazioni al sistema **trave,** ricordiamo che i vincoli più usati sono:



il **carrello che toglie un grado di libertà**

la cerniera fissa

(che impedisce le traslazioni orizzontale e verticale; toglie 2 gradi di libertà),

Da notare che questi vincoli sono olonomi, lisci e bilateri

In corrispondenza di ciascun movimento impedito nasce una reazione, che è la forza che il vincolo oppone sul punto in cui è applicato per impedirne il movimento che i carichi sulla struttura (forze di carico) tendono a provocare. Il numero dei movimenti impediti dal vincolo e quindi il numero delle reazioni da esso generate, definisce il rango del vincolo. Così si dice che il carrello è un vincolo di rango 1 (o semplice), la cerniera fissa è un vincolo di rango 2 (o doppio).
Immaginando di eliminare il vincolo costruttivo e di sostituirlo con tutte le sue reazioni, la struttura non cambia assetto e permane in equilibrio . Su questa osservazione si basa l'utilizzo del Principio dei Lavori Virtuali che offre un importante strumento di calcolo delle reazioni vincolari, in quanto esso consente di valutare la reazione esplicata da un vincolo semplice, tra quelli presenti, affinché l'equilibrio sia soddisfatto.

Per ottenere (mediante il PLV) le equazioni alle quali devono soddisfare le reazioni esplicate da <u>uno</u> dei vincoli sul sistema S in equilibrio , sottoposto a vincoli olonomi, , lisci e bilateri e ad una sollecitazione attiva, basta imporre che sia soddisfatta l'equazione simbolica della statica per ogni spostamento virtuale del sistema S* ottenuto da S sopprimendo il vincolo considerato e aggiungendo alla sollecitazione attiva le reazioni da questo esplicabili.

OSSERVAZIONE 5.1 L'equazione simbolica della Statica è una equazione scalare che quindi, per essere risolvibile, può contenere una sola incognita. Nel caso di un vincolo semplice si applica direttamente in quanto c'è una sola incognita reazione vincolare. Nel caso di un vincolo di rango 2, a cui corrispondono invece due incognite reazioni vincolari, è necessario sostituire il vincolo con uno opportuno di rango 1 e aggiungere la reazione mancante che è l'incognita cercata.

Esempio 5.4.1 Trave isostatica. Calcolo delle reazioni vincolari mediante il PLV

Consideriamo la struttura in figura che mostra una trave di lunghezza *l* vincolata all'estremità A con una cerniera fissa, e in B con un carrello. Nel punto C agisce una forza verticale **F** discendente, essendo C a distanza *a* da A e a distanza *b* da B. Ci proponiamo di calcolare la reazione $\mathbf{R}_B$ del carrello in B la cui direzione è ortogonale alla direzione di scorrimento orizzontale del carrello, essendo tale vincolo liscio.

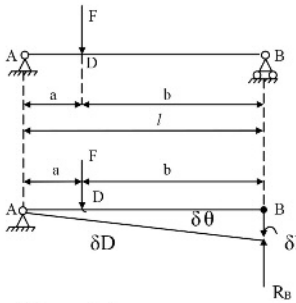


diagramma degli spostamenti (paragrafo 4.7)

Figura 5.4

Il sistema è isostatico e, come primo passo, rendiamo *labile* la struttura asportando il carrello e sostituendolo con la sua reazione verticale e orientata verso l'alto(abbiamo lasciato al sistema un grado di libertà). Gli spostamenti δB e δD sono spostamenti virtuali consentiti dalla nuova struttura labile sottoposta alle forze $\mathbf{F} = -F\,\mathbf{j}$, $F>0$, ed $\mathbf{R_B} = R_B\,\mathbf{j}$. Notiamo che essendo $\mathbf{R_B}$ incognita non conosciamo la sua direzione ma non il suo verso e per convenzione l'abbiamo disegnata concorde al verso positivo dell'asse y.

Il moto infinitesimo che ne consegue possiede le proprietà di un **moto rigido piano** e quindi possiamo utilizzare la formula (4.35) degli spostamenti elementari con riferimento al Centro di Istantanea Rotazione, che andrà determinato.

Essendo il punto A l'unico punto fisso esso può essere identificato con il centro di istantanea rotazione, A ≡ C.

Allora, rispetto ad un sistema di riferimento con l'origine in A l'asse x nella direzione della trave orientato verso B e l'asse y in quella di **F** orientato verso l'alto, ricordiamo la formula (4.35) del paragrafo 4.7 per lo spostamento elementare di un generico punto P rispetto al centro di istantanea rotazione:

$$\delta\mathbf{P} = \delta\theta\,[-(y_P - y_c)\mathbf{i} + (x_P - x_c)\mathbf{j}\,]$$

Nel nostro caso il centro C è il punto A di coordinate (0,0) e i punti di applicazione delle forze "attive" sono D e B, con $y_B = y_D = 0$, quindi si ottiene

$$\delta D = \delta\theta\, a\mathbf{j}$$
$$\delta B = \delta\theta\, l\,\mathbf{j}$$

con $\delta\theta$ l'angolo della rotazione infinitesima dell'asta intorno al punto A.

L'equazione simbolica della statica (5.10) fornisce allora:

$$\delta L = \mathbf{F}\cdot\delta D + \mathbf{R_B}\cdot\delta B = -F\mathbf{j}\cdot\delta\theta\,[a\mathbf{j}] + R_B\mathbf{j}\cdot\delta\theta\,[l\,\mathbf{j}] = \mathbf{0}$$

valida per ogni spostamento virtuale a partire dalla configurazione di equilibrio.

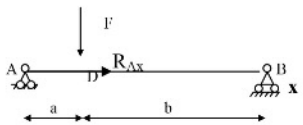
Quindi

$$-F\,a + R_B\,l = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{F\,a}{l}$$

Che il segno della componente lungo l'asse y della reazione $\mathbf{R_B}$ sia positivo dovevamo aspettarcelo perché essa deve bilanciare il carico **F** diretto verso il basso.

Determiniamo adesso $\mathbf{R_{Ax}}$

Ricordiamo che la cerniera in A è un vincolo di rango doppio che impedisce sia la traslazione orizzontale che quella verticale lasciando possibile la rotazione della trave intorno ad A. Essa è rappresentata dalla reazione vincolare $\mathbf{R_A} = R_{Ax}\mathbf{i} + R_{Ay}\mathbf{j}$ passante per A e quindi di momento nullo rispetto ad A.
Per rendere labile in questo caso la struttura di partenza della Figura 5.4, sostituiamo la cerniera A con il vincolo di rango immediatamente inferiore cioè di rango uno, carrello a scorrimento orizzontale in modo da porre in evidenza la sola **reazione orizzontale** (abbiamo sostituito al carrello a scorrimento verticale la reazione da esso esplicata). Le forze attive sono dunque $R_{Ax}\mathbf{i}$ e **F**



L'**unico** spostamento rigido possibile per l'asta è traslatorio (2 carrelli orizzontali) **parallelamente all'asse x.**
Dal Teorema di Chasles ,valido nei moti rigidi piani, si trova il centro C di istantanea rotazione dall'intersezione della retta passante per A e ortogonale alla direzione di scorrimento del carrello in A con la retta passante per B anch'essa ortogonale alla direzione di scorrimento del carrello in B, quindi essendo le 2 rette parallele tra loro e dovendo C appartenere ad entrambe si conclude che **C è il punto all'infinito dell'asse y e quindi essendo il raggio di curvatura infinito risulta che i punti** A e D **possono solo traslare orizzontalmente e della stessa quantità, in quanto l'asta è rigida, quindi**:

$$\delta A = \delta D = \mathbf{ci},\ \text{con arbitrario}$$

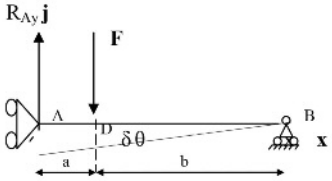
Quindi, l'applicazione del PLV fornisce

$$\delta L = \mathbf{R}_A \cdot \delta A + \mathbf{F} \cdot \delta D = 0 \;\Rightarrow\; c\mathbf{i} \cdot (R_{Ax}\mathbf{i} - F\mathbf{j}) = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

In accordo con il fatto che non c'è un'altra forza orizzontale da bilanciare.

Infine, calcoliamo $R_{Ay}\mathbf{j}$

Questa volta conserviamo il carrello a scorrimento verticale in A nella Figura 5.4 e sostituiamo al posto di quello a scorrimento orizzontale la reazione da esso esplicata $R_{Ay}\mathbf{j}$.



Il sistema labile ottenuto è soggetto alla forza incognita $R_{Ay}\mathbf{j}$ applicata in A e alla **F** (carico) nota applicata in D.
Questa volta la retta ortogonale allo spostamento del punto A coincide con l'asse delle x e quella ortogonale alla direzione dello spostamento del punto B è parallela alla direzione dell'asse y.
Le due rette si incontrano nel punto B che quindi, grazie al Teorema di Chasles, è il centro di istantanea rotazione cercato, B ≡ C, C(l, 0).
Gli spostamenti elementari dei punti di applicazione delle due forze saranno quindi:

$$\delta D = \delta\theta\,[\,(a - l)\,)\mathbf{j}\,]$$
$$\delta A = \delta\theta\,[\,(-l)\,)\mathbf{j}\,]$$

L'applicazione del PLV fornisce:

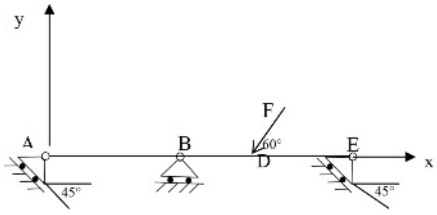
$$\delta L = R_{Ay}\mathbf{j} \cdot \delta A + \mathbf{F} \cdot \delta D = 0 \;\Rightarrow\; -l\delta\theta R_{Ay} - (a - l)\delta\theta F = 0 \Rightarrow R_{Ay} = \frac{l - a}{l} F$$

E il valore positivo di R_{Ay} è in accordo col fatto che $R_{Ay}\mathbf{j}$ deve bilanciare il carico $-F\,\mathbf{j}$, $F>0$

Esempio 5.4.2 Trave isostatica. Calcolo delle reazioni vincolari mediante il PLV.

Consideriamo una trave AE appoggiata in A, B ed E, dove in A ed E la direzione di scorrimento dei carrelli forma un angolo di 45° con la direzione orizzontale e il carrello in B può traslare parallelamente all'asse x.

La trave è caricata da una forza **F** inclinata di 60° sull'asse x.
Determinare, mediante il Principio dei Lavori Virtuali, le reazioni vincolari $\mathbf{R}_A$ e $\mathbf{R}_B$.



DATI

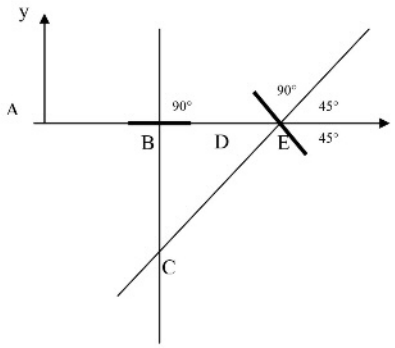
AB = 2m
BD=1m
DE=1m
F=10Kg

Figura 5.5

Si verifica facilmente che la trave è isostatica.

Calcoliamo $\mathbf{R}_A$

Si rende labile la struttura eliminando l'appoggio in A e inserendo la forza $\mathbf{R}_A$
Per applicare il PLV dobbiamo determinare gli spostamenti virtuali dei punti di applicazione A e D di $\mathbf{R}_A$ e di **F** rispettivamente. Dal momento che il moto della trave è rigido piano possiamo utilizzare la formula (4.35) del paragrafo 4.7. Ci occorre quindi determinare il Centro di Istantanea Rotazione C. Per il Teorema di Chasles esso si troverà all'intersezione delle rette ortogonali agli spostamenti di B e di E (il carrello in A non gioca alcun ruolo essendo stato sostituito dalla reazione da esso esplicata come indicato dal PLV):



$x_C = AB = 2 = x_B$

$y_C = - BC = - BE \, tg45° = - 2$

Quindi

$$\delta A = \delta\theta\,(-2\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j})$$

$$\delta D = \delta\theta\,(-2\mathbf{i} + (3+2)\mathbf{j})$$

Inoltre, scomponendo i vettori $\mathbf{R}_A$ ed $\mathbf{F}$ secondo gli assi cartesiani del piano xy con origine in A, risulta:

$$\mathbf{R}_A = R_A\,[\cos 45°\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}45°\mathbf{j}\,] = R_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{F} = -10\,[\cos 60°\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}60\mathbf{j}\,] = -10\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{j}\right)$$

E quindi

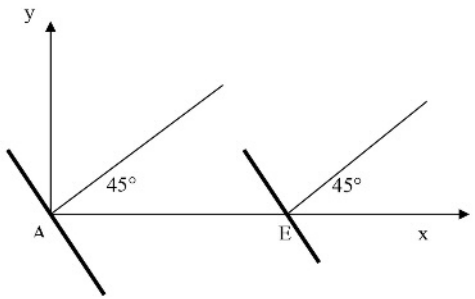
$$\delta L = R_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}\right)\delta\theta\,(-2\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}) - (5\mathbf{i} + 5\sqrt{3}\mathbf{j})\cdot\delta\theta(-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = 0$$

$$\delta L = \delta\theta\,[R_A(-\sqrt{2} - \sqrt{2}) + (+10 - 25\sqrt{3})] = 0$$

$$R_A = \frac{10 - 25\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

Calcoliamo $\mathbf{R}_B$

Procedendo in modo analogo, dopo aver eliminato il carrello in B nella figura 5.5, determiniamo il nuovo Centro di Istantanea Rotazione per la struttura resa così labile.
Questa volta le rette ortogonali agli spostamenti dei punti A e B sono parallele tra loro e inclinate di 45° rispetto all'asse x. Il Centro di Istantanea Rotazione è dunque un punto improprio nella loro direzione comune.



L'**unico** spostamento rigido possibile per l'asta è **traslatorio** parallelamente alla direzione comune dei carrelli in A ed in E.
Dal Teorema di Chasles, valido nei moti rigidi piani, si trova il centro C di istantanea rotazione dall'intersezione della retta passante per A e ortogonale alla direzione di scorrimento del carrello in A con la retta passante per E anch'essa ortogonale alla direzione di scorrimento del carrello in E, quindi essendo le 2 rette parallele tra loro e dovendo C appartenere ad entrambe si conclude che **C** è il punto all'infinito nella direzione comune ortogonale ai due carrelli e quindi essendo il raggio di curvatura infinito risulta che i punti B e D possono solo traslare della stessa quantità nella direzione di versore $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$

Quindi si ha

$$\delta B = \delta D = c\,\mathbf{u}\,, \text{ con c arbitrario}$$

E il PLV fornisce

$$\delta L = \mathbf{R}_B \cdot \delta B + \mathbf{F} \cdot \delta D = 0 \;\Rightarrow\; c(\mathbf{R}_B + \mathbf{F}) \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\delta L = c(R_B\mathbf{j} - 5\mathbf{i} - 5\sqrt{3}\,\mathbf{j}) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}) = 0$$

$$R_B = 5(\sqrt{3} - 1)$$

6. ELEMENTI DI CATENE CINEMATICHE. APPLICAZIONI ALL'ARCO A 3 CERNIERE

La conoscenza del sistema degli spostamenti virtuali per un'asta vincolata ha consentito il calcolo di una singola reazione vincolare alla volta mediante l'uso del PLV. Nel caso di 2 aste vincolate fra loro e all'esterno mediante 3 cerniere, Arco a 3 Cerniere, oltre ai due centri assoluti di rotazione corrispondenti alle due cerniere fisse, va considerato anche quello relativo dovuto alla cerniera interna mobile. In questo caso, il sistema degli spostamenti virtuali va determinato introducendo il concetto di Catene Cinematiche che verrà approfondito nei corsi di Scienza delle Costruzioni e Meccanica Applicata.

6.1 Allineamento dei Centri di Istantanea Rotazione nelle Catene Cinematiche

Nel Paragrafo 3.9 abbiamo introdotto un sistema costituito da 2 aste rigide incernierate tra loro e vincolate all'esterno con due cerniere fisse, una per ciascuno estremo di ogni singola asta. Poiché le due aste non sono saldate esse possono ruotare intorno alla cerniera mobile comune. Il sistema non è rigido ma composto da due parti rigide ed è detto Arco a 3 Cerniere.
Il sistema è isostatico in quanto le due aste hanno nel piano 3+3 = 6 gradi di libertà e le tre cerniere tolgono 2+2+2=6 gradi di libertà.
Nello stesso paragrafo abbiamo anche visto come affrontare il calcolo delle reazioni vincolari per questa struttura mediante le Equazioni Cardinali della Statica. Ci proponiamo ora di affrontare tale calcolo applicando opportunamente il metodo sviluppato nel paragrafo 5.3 basato sul Principio dei Lavori Virtuali. Ribadiamo che il vantaggio offerto da questo metodo consiste nel determinare una delle reazioni vincolari che ci interessa in particolare senza dover determinare i valori delle altre.
Consideriamo dunque un arco a tre cerniere come in Figura 6.1, proponendoci la determinazione della reazione orizzontale della cerniera D, conseguente alla condizione di carico costituita da una forza orizzontale sull'asta AB in E.
Essendo la struttura isostatica, per poter applicare il PLV dobbiamo renderla labile e determinare il corrispondente sistema di spostamenti virtuali.
Se denotiamo con $C_1 = A$ il Centro Assoluto di Rotazione dell'asta AB intorno ad A, con $C_2 = D$ il Centro Assoluto di Rotazione dell'asta BD intorno a D e con $C_{12} = B$ il Centro Relativo di Rotazione delle 2 aste intorno alla cerniera comune B, si nota che nella configurazione isostatica di Figura 6.1 **i tre Centri non sono allineati**.

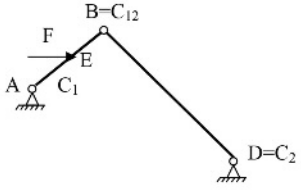


Figura 6.1 Configurazione isostatica

La situazione cambia se rendiamo la struttura labile.

Sostituiamo la cerniera D con il vincolo di rango immediatamente inferiore (carrello con cerniera) in modo da porre in evidenza la reazione cercata.
L'aver sostituito la cerniera in D con un carrello + una reazione orizzontale ha reso la struttura labile in quanto si è lasciato al sistema un grado di libertà.
Dal Teorema di Chasles il centro C_2 di assoluta istantanea rotazione dell'asta BD si trova ora nel punto di intersezione della retta passante per D ortogonale alla direzione di scorrimento del carrello con la retta prolungamento dell'asta AB ortogonale allo spostamento di B, in quanto lo spostamento di B è descritto da un arco infinitesimo (approssimato dalla corda) di circonferenza di centro C_1 e raggio C_1 B e avviene dunque ortogonalmente all'asta stessa.

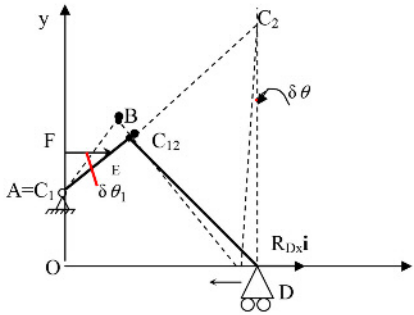


Figura 6.2
Configurazione Labile

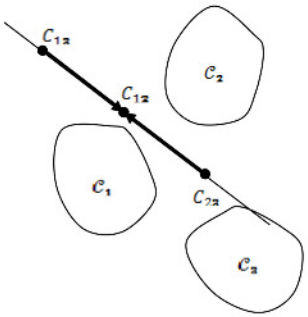
Nella Figura 6.2, $\delta\theta$ indica l'angolo della rotazione infinitesima del punto D intorno al centro assoluto di rotazione C_2 e di raggio C_2D e analogamente, con $\delta\theta_1$ si è indicato l'angolo della rotazione infinitesima del punto B intorno al centro assoluto di rotazione $C_1 = A$ e di raggio C_1B.

Si vede chiaramente dalla figura 6.2 che nella configurazione resa labile i tre centri C_1, C_{12} e C_2 sono allineati.

Le **Catene Cinematiche** sono quei sistemi labili costituti da corpi rigidi ordinabili in modo che ogni corpo del sistema risulti connesso soltanto al corpo che lo precede e a quello che lo segue.
L'arco a 3 cerniere è un tipico esempio di catena piana di due sole travi vincolate.

Per i sistemi *labili* costituiti *da più corpi rigidi* nel piano valgono i seguenti Teoremi detti **Teoremi delle Catene Cinematiche.** Senza entrare nel dettaglio delle dimostrazioni, per cui si rimanda al Corso di Scienza delle Costruzioni, enunciamo i seguenti teoremi di fondamentale importanza per le applicazioni:

Primo teorema di Aronhold-Kennedy. Dati tre corpi rigidi C_1 C_2 e C_3 i quali si muovano sullo stesso piano, allora i centri di istantanea rotazione dei tre moti relativi (cioè del moto di C_1 rispetto a C_2, del moto di C_1 rispetto a C_3 e del moto di C_2 rispetto a C_3) sono allineati.



La condizione di allineamento nel caso di 3 corpi è solo necessaria per la labilità del sistema.

Secondo Teorema di Aronhold-Kennedy (Corollario del primo)**:** Dati due corpi rigidi C_1 e C_2 i quali si muovano sullo stesso piano, allora il centro di istantanea rotazione C_{12} del moto relativo (cioè del moto di C_1 rispetto a C_2) è allineato ai centri di istantanea rotazione assoluti dei due moti di C_1 e C_2 .

In questo caso la condizione di allineamento è necessaria e sufficiente per la labilità del sistema.

Nota che il Secondo Teorema di Aronhold-Kennedy vale in particolare nel caso dell'arco a 3 cerniere (2 corpi rigidi)

6.2 Relazione tra gli angoli delle due assolute rotazioni nel sistema degli spostamenti virtuali per l'arco a tre cerniere.

Ricordiamo che, data una struttura piana, una volta che si siano trovati i centri di istantanea rotazione, è possibile ricavare il sistema di spostamenti rigidi virtuali tenendo presente l'espressione

$$\delta P = \delta\,\theta\,\mathbf{k} \wedge \mathbf{(P\text{-}C_i)} = \delta\,\theta\,\mathbf{k} \wedge [(x_P - x_{Ci})\,\mathbf{i} + (y_P - y_{Ci})\mathbf{j}\,] =$$
$$\delta\,\theta\,[\,-(y_P - y_{Ci})\mathbf{i} + (x_P - x_{Ci})\mathbf{j}\,]$$

dello spostamento virtuale del generico punto P riferito al centro d'istantanea rotazione $\mathbf{C_i}$.

Osservazione Importante. E' evidente che, nell'arco a tre cerniere di figura 6.2, il punto $B \equiv C_{12}$, centro di istantanea rotazione nel moto relativo delle due travi, è caratterizzato dall'avere lo stesso spostamento infinitesimo nei due moti di rotazione assoluti, intorno ai centri C_1 e C_2, di angoli $\delta\,\theta_1$ e $\delta\,\theta$ rispettivamente, in quanto esso appartiene sia alla trave AB che alla trave CD, cioè:

$$\delta B = \delta\,\theta_1\,\mathbf{k} \wedge (B\text{-}C_1) = \delta\,\theta\,\mathbf{k} \wedge (B\text{-}C_2) \qquad (6.1)$$

Con riferimento alla Figura 6.2, abbiamo precedentemente osservato che dal Teorema di Chasles il centro assoluto C_2 di istantanea rotazione relativo all'asta BD è dato dall'intersezione della retta passante per D ortogonale alla direzione orizzontale di scorrimento del carrello in D con la retta prolungamento dell'asta AB, in quanto lo spostamento infinitesimo di B, rotatorio intorno a $C_1 \equiv A$ di angolo $\delta\,\theta_1$, avviene secondo la tangente alla circonferenza di raggio BC_1 e quindi ortogonalmente all'asta stessa. **In questo modo i tre centri si trovano sulla retta per** C_1, C_{12} e C_2 e quindi risultano **allineati, come deve essere affinché il sistema sia labile**.

Notiamo che essendo B **interno** al segmento C_1C_2, possiamo scrivere:

$$(B\text{-}C_1) = |(B - C_1)|\mathbf{u}\,, \quad (B\text{-}C_2) = -\,|(B - C_2)|\mathbf{u}\,, \qquad (6.2)$$

cioè i vettori congiungenti B con C_1 e C_2, rispettivamente, sono paralleli e discordi e di versore **u** dato da

$$\mathbf{u} = \frac{(B - C_1)}{|(B - C_1|} = -\frac{(B - C_2)}{|(B - C_2|} \qquad (6.3)$$

e quindi dalla (6.1) **risulta**

$$\delta B = \delta\,\theta_1\,\mathbf{k} \wedge |(B\text{-}C_1)|\mathbf{u} = \delta\,\theta\,\mathbf{k} \wedge (-\,|(B\text{-}C_2)|\mathbf{u}) \qquad (6.4)$$

da cui si ricava

$$\delta\theta_1 = -\delta\theta\,\frac{BC_2}{BC_1} \qquad (6.5)$$

dove le lunghezze $BC_1 = |(B - C_1)|$, $BC_2 = |(B - C_2)|$ sono, ovviamente, i raggi delle circonferenze rispettivamente di centro C_1 e centro C_2 descritte dal punto B intorno al centro assoluto C_1, se considerato appartenente all'asta AB, e intorno al centro assoluto C_2, se considerato appartenente all'asta BD.

Nota quindi che se il centro relativo è* interno *al segmento che congiunge i 2 centri assoluti allora le 2 rotazioni avvengono in verso opposto

Dal procedimento usato per arrivare alla (6.5) è evidente che nel caso in cui il centro relativo si trovi all'esterno della congiungente i 2 centri assoluti le 2 rotazioni hanno verso concorde.

Possiamo quindi affermare che vale la seguente relazione tra gli angoli di rotazione intorno ai due centri assoluti :

$$\delta\theta_1 = \pm\delta\theta\,\frac{BC_2}{BC_1} \qquad (6.6)$$

dove và preso il segno + se il centro relativo C_{12} si trova sulla retta passante per i centri assoluti C_1, e C_2 all'esterno del segmento che li congiunge , il segno – nel caso contrario.

6.3 Calcolo delle componenti orizzontale e verticale delle reazioni esplicate dalle cerniere fisse nell'arco a 3 cerniere

Calcolo di $R_{Dx}\,\mathbf{i}$

Assumendo un sistema di riferimento Oxy con l'asse y perpendicolare alla direzione di scorrimento del carrello in D e orientato verso l'alto e l'asse x parallelo alla direzione del carrello e orientato come in figura 6.2, si ha

$$\delta D = \delta\theta\ [-(y_D - y_{C2})\mathbf{i} + (x_D - x_{C2})\mathbf{j}\,]$$

e, usando la realazione (6.5) tra gli angoli $\delta\theta$ e $\delta\theta_1$, si ottiene

$$\delta E - \delta\theta_1\,[-(y_E - y_{C1})\mathbf{i} + (x_E - x_{C1})\mathbf{j}\,] = -\,\delta\theta\,\frac{BC_2}{BC_1}\,[-(y_E - y_{C1})\mathbf{i} + (x_E - x_{C1})\mathbf{j}\,]$$

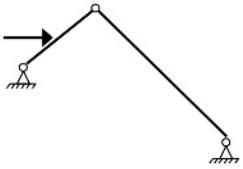
Infine, il PLV fornisce l'equazione:

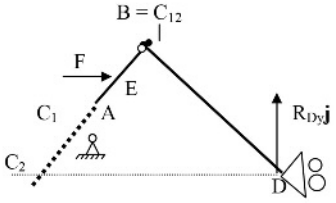
$$\delta L = F\mathbf{i}\cdot\delta E + R_{Dx}\mathbf{i}\cdot\delta D = 0 \quad , \quad \forall\theta$$

nella sola incognita R_{Dx}

Calcolo di $R_{Dy}\,\mathbf{j}$

Eliminiamo il carrello orizzontale per rendere labile la struttura e sostituiamo la sua azione con la forza R_{Dy}





Dal Teorema di Chasles il centro assoluto di istantanea rotazione per l'asta BD si trova questa volta nel punto, C_2 , di intersezione tra la perpendicolare alla direzione dello spostamento verticale del carrello in D e il prolungamento dell'asta AB che risulta ortogonale agli spostamenti rotatori intorno a C_1 dei punti dell'asta medesima , come osservato nel caso precedente e concordemente col fatto che i centri di istantanea rotazione devono essere allineati.

Questa volta, essendo $B=C_{12}$ **esterno al segmento** C_1C_2 , risulta:

$$\delta\theta_1 = +\delta\theta\,\frac{BC_2}{BC_1}$$

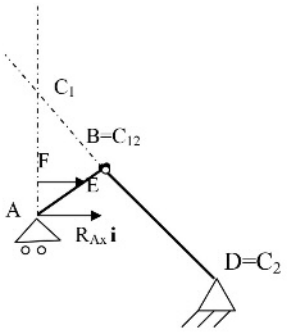
(Le due rotazioni hanno verso concorde)

$$\delta E = \delta\theta_1\,[-(y_E - y_{C1})\mathbf{i} + (x_E - x_{C1})\mathbf{j}\,] = +\,\delta\theta\,\frac{BC_2}{BC_1}\,[-(y_E - y_{C1})\mathbf{i} + (x_E - x_{C1})\mathbf{j}\,]$$

$$\delta D = \delta\theta\,[-(y_D - y_{C2})\mathbf{i} + (x_D - x_{C2})\mathbf{j}\,]$$

$$\delta L = \mathbf{F}\mathbf{i}\cdot\delta E + R_{Dy}\,\mathbf{j}\cdot\delta D = 0 \quad , \quad \forall\delta\theta$$

Calcolo di $R_{Ax}\,\mathbf{i}$



Dal Teorema di Chasles il centro assoluto di istantanea rotazione per l'asta AB si trova questa volta nel punto, C_1 , di intersezione tra la perpendicolare alla direzione dello spostamento orizzontale del carrello in A e il prolungamento dell'asta BD che risulta ortogonale agli spostamenti dei punti dell'asta BD rotatori intorno al centro assoluto di rotazione C_2 , come osservato nel caso precedente e concordemente col fatto che i centri di istantanea rotazione devono essere allineati.
Questa volta, essendo $B=C_{12}$ in**terno al segmento** C_1C_2 , risulta

$$\delta\theta_1 = +\delta\theta\,\frac{BC_2}{BC_1}$$

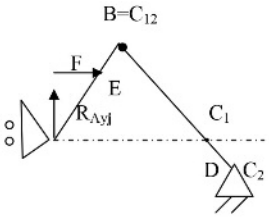
$$\delta E = \delta\theta_1\,[-(y_E - y_{C1})\mathbf{i} + (x_E - x_{C1})\mathbf{j}\,]$$

$$\delta A = \delta\theta_1\,[-(y_A - y_{C1})\mathbf{i} + (x_E - x_{C1})\mathbf{j}\,]$$

$$\delta L = F\mathbf{i}\cdot\delta E + R_{Ax}\,\mathbf{i}\cdot\delta A = 0 \quad , \quad \forall\delta\theta_1$$

Nota che in questo caso non occorre utilizzare la (6.6) in quanto non sono coinvolti spostamenti di punti dell'asta BD essendo essa scarica.

Calcolo di $R_{Ay}\mathbf{j}$



In questo caso il centro relativo è esterno alla congiungente i 2 centri assoluti ma come prima non occorre utilizzare la (6.6).

$$\delta E = \delta\theta_1 [- (y_E - y_{C1})\mathbf{i} + (x_E - x_{C1})\mathbf{j}]$$

$$\delta A = \delta\theta_1 [- (y_A - y_{C1})\mathbf{i} + (x_E - x_{C1})\mathbf{j}]$$

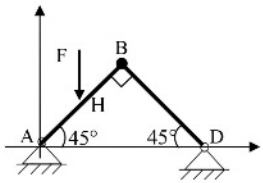
$$\delta L = F\mathbf{i} \cdot \delta E + R_{Dy}\mathbf{j} \cdot \delta A = 0 \quad \forall \delta\theta_1$$

Nel prossimo Esempio calcoleremo la reazione vincolare interna, esplicata cioè dalla cerniera in B.

Esempio 6.1 Calcolo della reazione esplicata dalla cerniera interna in un arco a 3 cerniere

Per l'arco a tre cerniere in figura si determini la reazione vincolare $\mathbf{R_B}$, esplicata dalla cerniera interna mobile in B, utilizzando il Principio dei Lavori Virtuali.

$$\text{DATI}: \quad AB = BD = 1\text{m} \qquad F = 1\text{kg}\,,$$
$$AH = HB = \frac{1}{2}\text{m} \quad B\hat{A}D = 45° = B\hat{D}A$$



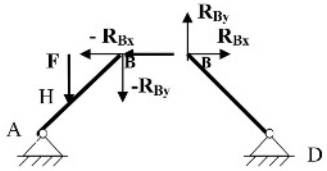


Figura 6.3 Scomposizione dell'arco a 3 cerniere nelle due travi componenti

Si scompone l'arco nelle due travi AB e BD , sostituendo alla cerniera interna in B la sua reazione $\mathbf{R_B}$ **utilizzando il Principio di Azione e Reazione** come in Figura 6.3.
Quindi A è il centro di istantanea rotazione per l'asta AB , D è il centro di istantanea rotazione per l'asta BD.
Avendo sostituito alla cerniera in B la reazione da essa esplicata abbiamo ottenuto che l'asta AB vincolata dalla cerniera fissa in A è **un sistema labile ad un grado di libertà soggetto alle forze "attive" F e $\mathbf{R_B}$** , mentre l'asta BD con cerniera fissa in D **è un sistema labile ad un grado di libertà soggetto alle forze "attive" F e - $\mathbf{R_B}$**

Applichiamo il PLV alle 2 aste separatamente

L'asta AB ruota intorno ad A di un angolo $\delta\theta_1$ e si ha

$$\delta L = \delta H \bullet \mathbf{F} + \delta B \bullet (-\mathbf{R_B}) = \mathbf{0}$$

con $\delta H = \delta\theta_1 [-(y_H - y_A)\mathbf{i} + (x_H - x_A)\mathbf{j}] = \delta\theta_1 [-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}]$,

$\delta B = \delta\theta_1[-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}]$

L'asta BD ruota intorno a D di un angolo $\delta\theta$ e si ha

$$\delta L = \delta B \bullet (\mathbf{R_B}) = \mathbf{0}$$

con $\delta B = \delta\theta[-(y_B - y_D)\mathbf{i} + (x_B - x_D)\mathbf{j}] = \delta\theta [-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + (\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2})\mathbf{j}]$

Quindi

asta AB $\delta L = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + R_{Bx}(\frac{\sqrt{2}}{2}) - R_{By}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ (avendo semplificato per $\delta\theta_1$)

asta BD $\delta L = -R_{Bx}\frac{\sqrt{2}}{2} + R_{By}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}) = 0$ (avendo semplificato per $\delta\theta$)

Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} R_{Bx}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - R_{By}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0 \\ -R_{Bx}\frac{\sqrt{2}}{2} - R_{By}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

dalla seconda ottengo

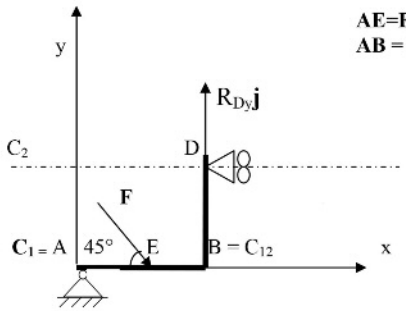
$$R_{Bx} = -R_{By}$$

sostituendo nella prima si ricava

$$-R_{By}\frac{\sqrt{2}}{2} - R_{By}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 0,\ R_{By} = \frac{1}{4}$$

$$R_{Bx} = -\frac{1}{4}$$

Esempio 6.2 Arco a 3 cerniere con le due aste ortogonali tra loro



AE=EB= 1m , $|\mathbf{F}|$ = 30kg
AB = BD =2m,

Per il Teorema di Chasles il centro assoluto C_2 di rotazione dell'asta BD si trova sulla retta per D ortogonale alla direzione di scorrimento del carrello in D e sulla retta per A e B avente la stessa direzione dell'asta. Pertanto, essendo le due rette parallele il centro è il punto improprio corrispondente alla direzione comune. In questo modo i tre centri risultano essere allineati. Essendo C_2 all'infinito, lo spostamento di tutti i punti P dell'asta BD è traslatorio, della stessa quantità, nella direzione verticale:

$$\delta P = s\mathbf{j} \quad \text{con s valore arbitrario,} \quad \forall P \in \text{asta BD}$$

Poiché B appartiene sia all'asta AB che all'asta BD, dovrà risultare che lo spostamento infinitesimo nella rotazione intorno al centro di istantanea rotazione $\mathbf{C_1}$

$$\delta B = 2\delta\theta \mathbf{j}$$

sia uguale a

$$\delta B = s\mathbf{j}$$

e quindi risulta

$$s = 2\delta\theta \qquad (6.7)$$

e il PLV fornisce

$$\delta L = \delta E \bullet \mathbf{F} + \delta D \bullet R_{Dy}\mathbf{j} = 2\delta\theta \mathbf{j} \bullet \mathbf{F} + s\mathbf{j} \bullet R_{Dy}\mathbf{j} = \mathbf{0}$$

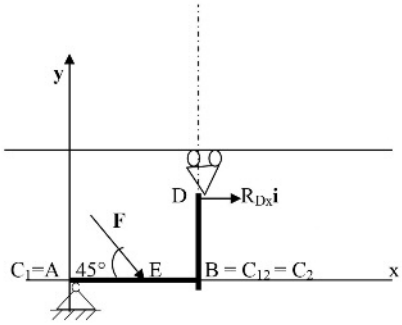
e dalla (6.7) si ottiene

$$\mathbf{j} \bullet \mathbf{F} + \mathbf{j} \bullet R_{Dy}\mathbf{j} = \mathbf{0} \qquad \text{con} \qquad \mathbf{F} = 30\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{i} - 30\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}$$

quindi

$$-30\frac{\sqrt{2}}{2} + R_{Dy} = 0 \qquad R_{Dy} = 15\sqrt{2}$$

Calcoliamo ora $R_{Dx}\mathbf{i}$



Per il Teorema di Chasles il centro assoluto di istantanea rotazione C_2 dell'asta BD si trova nel punto di intersezione della retta ortogonale alla direzione del carrello con la retta che giace sull'asta AB, quindi, esso coincide con il centro relativo di rotazione B. In tal modo viene soddisfatta la proprietà di allineamento.
Quindi, pensato B come appartenente all'asta AB risulta

$$\delta B = \delta\theta(x_B\,\mathbf{j})$$

con $\delta\theta$ angolo della rotazione infinitesima dei punti dell'asta AB intorno al centro assoluto C_1

mentre, come centro di istantanea rotazione C_2 dell'asta BD risulta

$$\delta B = 0$$

Ne consegue

$$\delta\theta=0$$

e quindi non ci potrà essere rotazione dell'asta AB intorno al centro di istantanea rotazione A. In particolare risulta $\delta E = 0$

Per quanto riguarda lo spostamento del punto D intorno al centro di istantanea rotazione B, si avrà

$$\delta D = \delta\theta_1 \, (-y_D \, \mathbf{i}) = -2 \, \delta\theta_1 \mathbf{i}$$

con $\delta\theta_1$ angolo della rotazione infinitesima dei punti dell'asta BD intorno al centro assoluto C_2

Quindi, sarà:

$$\delta L = \delta D \bullet R_{Dx} \, \mathbf{i} = -2 \, \delta\theta_1 \mathbf{i} \bullet R_{Dx} \, \mathbf{i} = -2 \, \delta\theta_1 \, R_{Dx} = 0 \;\; , \forall \delta\theta_1$$

da cui risulta

$$R_{Dx} = \mathbf{0}$$

in accordo con i calcoli svolti usando le equazioni cardinali della statica e in accordo anche con l'osservazione che, essendo l'asta BD **scarica**, la reazione $\mathbf{R_D}$ **ha la direzione dell'asta stessa** e cioè parallela all'asse y $(\mathbf{R_D} = R_D \, \mathbf{j})$

7. GEOMETRIA DELLE MASSE

I corpi che, nell'ambito della meccanica applicata, entrano a far parte di un sistema sono sempre dei corpi reali e perciò corpi pesanti; possiedono, cioè, oltre ad una caratteristica estensiva, che ne definisce la forma, anche una caratteristica intensiva legata alla *quantità di materia* che riempie quella forma.
L'esperienza insegna che al fine di determinare la risposta dinamica di un sistema non basta conoscere le sue caratteristiche cinematiche, i vincoli e le sollecitazioni applicati.
Se la "materialità" di un sistema non ha un ruolo essenziale nella Statica lo acquista invece nella dinamica in cui ne rappresenta addirittura il punto di partenza.
Il presente capitolo " Geometria delle Masse" studia dunque tutte le proprietà inerenti la distribuzione delle masse all'interno di un sistema . Esso si può sviluppare indipendentemente dalla statica e dalla dinamica dei sistemi; non sono necessarie né conoscenze riguardanti il moto del sistema, né conoscenze riguardanti le forze agenti su di esso, occorre la conoscenza della geometria dei corpi in senso stretto.
In meccanica, quindi, un sistema sarà sempre costituito da un certo numero di masse, una nel caso più semplice del punto materiale.

7.1 Centro di massa e baricentro di un sistema di n punti materiali

Gli schemi fondamentali dei corpi naturali su cui si fondano gli sviluppi della Meccanica Razionale sono sostanzialmente tre:
a) *punto materiale: punto a cui associamo una certa quantità di materia.* Si usa quando le dimensioni del corpo sono piccole rispetto alla regione dello spazio in cui avviene il fenomeno in studio e per il quale non interessi distinguerne le parti. Avendo deciso di ignorare la forma e le dimensioni di un punto materiale, esso risulterà caratterizzato, dal punto di vista geometrico, soltanto dalla sua posizione nello spazio fisico Esempio: Studio del moto della Terra intorno al Sole

b)sistema di punti materiali (sistema discreto). Il punto materiale rappresenta una schematizzazione utile non solo per descrivere situazioni di interesse diretto ma è anche il necessario presupposto alla meccanica dei sistemi materiali estesi. Un sistema materiale esteso può essere sempre immaginato come costituito da un insieme di punti materiali. Talvolta, il sistema esteso è effettivamente formato da un certo numero di costituenti praticamente puntiformi ciascuno identificabile e distinguibile dagli altri: si dice allora che si ha a che fare con un sistema discreto. Esempi: Studio delle orbite dei pianeti nel Sistema solare: modello dell' atomo costituito dall'insieme dei suoi elettroni e dal nucleo.
c) sistema continuo:composto da una distribuzione continua di massa. Più spesso, a livello macroscopico, un corpo esteso si presenta come un sistema continuo. Si usa quando le dimensioni non si possono più ritenere trascurabili ai fini del moto, il corpo occupa una regione estesa. Il sistema continuo si immagina costituito da infiniti punti materiali di masse elementari dm, cioè la suddivisione del corpo viene portata al limite facendo tendere a zero le dimensioni degli elementi. Questa assunzione è in contrasto con la struttura atomica della materia, e oggi la distribuzione continua di materia è considerata solo come una assunzione fenomenologica che permette di studiare l'equilibrio e il moto di corpi macroscopici su scale molto maggiore di quelle atomiche.

Esempio: la Terra nel suo moto di rotazione intorno al proprio asse.

Una quantità indispensabile per lo sviluppo degli argomenti che seguiranno è il **Centro di Massa** o, detto equivalentemente, **Baricentro**.

Consideriamo un sistema discreto di punti materiali (P_i, m_i), i=1,2,..n , punti dotati di massa, dove con $m_i>0$ abbiamo indicato la massa del generico punto P_i, e consideriamo il caso in cui essi appartengano ad una regione abbastanza ristretta dello spazio in modo da poter considerare costante l'accelerazione di gravità $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ con $\mathbf{k}$ versore dell'asse z (verticale ascendente), avendo fissato una terna cartesiana Oxyz .
Richiamiamo i concetti esposti nel paragrafo 2.5.
Le **forze peso** agenti sui punti P_i, $\mathbf{p_i} = -m_i g\mathbf{k}$, costituiscono un ***sistema di vettori paralleli e concordi*** con risultante

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} -m_i g\mathbf{k} = -Mg\mathbf{k}\,, \quad \text{dove } M = \sum_{i=1}^{n} m_i \text{ è la massa totale del sistema}$$

e il cui **centro** è per definizione (vedi formula (2.27)):

$$P_0 - O = \frac{1}{-Mg} \sum_{i=1}^{n} -m_i g(P_i - O)$$

Semplificando per $-g$ si ottiene il Centro di Massa P_0 (detto anche Baricentro)

$$M(P_0 - O) = \sum_{i=1}^{n} m_i (P_i - O) \tag{7.1}$$

Esso è per le proprietà di Equivalenza dei Sistemi di Vettori Applicati Paralleli con $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$, quel **punto dell'asse centrale dove và applicato il vettore risultante $\mathbf{R} = -Mg\mathbf{k}$ (forza peso totale)** del sistema (***e non la massa totale del sistema,*** non ha senso parlare di massa concentrata in un punto) affinché il sistema $S = \{(P_i, -m_i g\mathbf{k})\}$ sia equivalente ad $S' = \{(P_0, -Mg\mathbf{k})\}$.

Come dimostrato nel paragrafo 2.5 valgono le proprietà di unicità e indipendenza dalla scelta del punto O relative alla definizione del **centro P_0**.

Esempio 7.1 Teorema del moto del baricentro.

Riportiamo qui un ben noto risultato della Dinamica di un sistema discreto di punti materiali.

Deriviamo ambo i membri della (7.1) rispetto al tempo, si ha:

$$\frac{d}{dt} M(P_0 - O) = \frac{d}{dt} \sum_i m_i (P_i - O) \;\Rightarrow M\mathbf{v}(P_0) = \sum_i m_i \mathbf{v_i} = \mathbf{Q} \equiv \text{ quantità di moto} \tag{7.2}$$

Cioè, la Quantità di moto di un sistema di n punti materiali è pari al prodotto della massa totale per la velocità del baricentro.

Derivando una seconda volta rispetto al tempo t, si ottiene la I equazione Cardinale della Dinamica (vedi (3.12))

$$\frac{d}{dt} M\mathbf{v}(P_0) = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{R}^e$$

dove con $\mathbf{R}^e$ abbiamo indicato il risultante delle forze esterne (attive + vincolari)

Quindi,

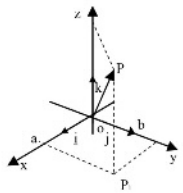
$$M\mathbf{a}(P_0) = \mathbf{R}^e \quad \text{Teorema del Moto del baricentro}$$

*Il baricentro di un sistema materiale si muove come un punto di massa pari alla massa totale del sistema, su cui si immagini applicato il risultante delle forze esterne al sistema (*il sistema delle forze interne è equivalente a zero, è equilibrato).

Proiettando la (7.1) sugli assi della terna Oxyz, si hanno le coordinate di P_0:

$$Mx_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \qquad My_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad Mz_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \tag{7.3}$$

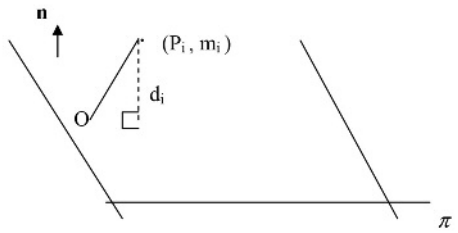
Notare che le coordinate dei punti P_i, x_i, y_i, z_i sono le **distanze con segno** dei punti P_i dai piani cartesiani, rispettivamente, yz (x=0), xz (y=0), xy (z=0).



Quindi, i secondi membri della (7.3), essendo somme di prodotti di masse per distanze con segno, si definiscono anche **Momenti Statici o Momenti di Primo Grado** del sistema rispetto ai detti piani, che quindi coincidono con i momenti statici del suo centro di massa, (P_0, M), rispetto a tali piani.

Questa definizione si estende facilmente a qualsiasi piano π:

$$Md_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i \quad \text{con} \quad d_0 = (P_0 - 0)\cdot \mathbf{n} \quad \text{e} \quad d_i = (P_i - O)\cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \text{ versore normale al piano } \pi$$



Quindi, se P_0 appartiene al piano, il momento statico del sistema materiale discreto relativo a tale piano è nullo e viceversa.

In particolare, se il sistema materiale è piano il centro P_0 apparterrà a tale piano.

Infatti, se ad esempio i punti materiali appartengono al piano coordinato $z = 0$ di un riferimento cartesiano con origine in O appartenente al piano , dalla (7.3) risulta:

$$My_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad Mx_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \,, \quad Mz_0 = 0 \text{ essendo } z_i = 0$$

In tal caso le distanze con segno x_i , y_i dai piani coordinati x=0 e y=0 coincidono con le distanze dagli assi y e x rispettivamente. Parleremo in tal caso **di momenti statici rispetto a rette**.

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \text{ è il momento statico rispetto all'asse x,}$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \text{ è il momento statico rispetto all'asse y.}$$

Quindi risulta:

$$y_0 = \frac{S_x}{M}, \qquad x_0 = \frac{S_y}{M} \tag{7.4}$$

In generale, si definiscono i momenti statici rispetto ad una retta r considerando le d_i come le distanze delle masse m_i dalla retta, con n versore normale ad essa. E' evidente che se il centro di massa P_0 appartiene alla retta, il momento statico dell'intero sistema rispetto a tale retta è nullo.

7.2 Proprietà del centro di Massa per un Sistema Discreto di Punti Materiali

Iniziamo con una proprietà basilare da cui discendono tutte le altre che forniscono gli strumenti per determinare il C.M,

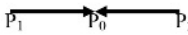
1) Nel caso di 2 punti materiali (P_1 , m_1) e (P_2 , m_2) il centro è **interno** al segmento P_1P_2 e lo divide in parti inversamente proporzionali alle masse. Infatti, dalla (7.1) applicata una prima volta al caso in cui $O \equiv P_1$ e una seconda volta con $O \equiv P_2$, si ha:

$$M(P_0 - P_1) = m_2(P_2 - P_1) \quad \text{con } O \equiv P_1$$
$$M(P_0 - P_2) = m_1(P_1 - P_2) \quad \text{con } O \equiv P_2$$

Da cui, dividendo membro a membro

$$\frac{(P_0 - P_1)}{(P_0 - P_2)} = \frac{m_2}{m_1}\frac{(P_2 - P_1)}{(P_1 - P_2)} = -\frac{m_2}{m_1}\frac{(P_1 - P_2)}{(P_1 - P_2)} = -\frac{m_2}{m_1} \qquad (7.5)$$

risulta quindi che i due vettori $(P_0 - P_1)$ e $(P_0 - P_2)$ sono opposti:



da cui segue che **P_0 è interno** al segmento.

Passando ai moduli nella (7.5) si ha

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1} \qquad l_1 \text{ lunghezza di } P_0P_1 \quad \text{e } l_2 \text{ lunghezza di } P_0P_2$$

le due lunghezze sono inversamente proporzionale alle masse, cioè il centro di massa si trova più vicino al punto con la massa maggiore.

Se $m_1 = m_2$, il C.M. si trova nel punto medio del segmento che congiunge i due punti materiali.

In tal caso, per le coordinate risulta:

$$\frac{(P_0 - P_1)}{(P_0 - P_2)} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 - x_1 = -(x_0 - x_2) \\ y_0 - y_1 = -(y_0 - y_2) \\ z_0 - z_1 = -(z_0 - z_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ z_0 = \dfrac{z_1 + z_2}{2} \end{cases}$$

Più in generale si verifica facilmente che se tutti i punti del sistema appartengono ad una retta anche il C.M. appartiene a questa retta; se poi il sistema è piano anche il C.M. appartiene al piano del sistema.

2) Proprietà distributiva del Centro di Massa

Comunque si suddivide il sistema in sottosistemi parziali il centro di massa dell'intero sistema coincide con il centro di massa dei sistemi parziali.

Questa proprietà discende direttamente dalla proprietà distributiva della somma e dalle proprietà di equivalenza di sistemi di vettori paralleli applicati che ci consente di sostituire ad un sottogruppo di vettori paralleli il loro risultante applicato nel relativo centro.

Infatti, suddividiamo il sistema di n punti materiali in 3 sottogruppi di n_1, n_2, n_3 punti materiali con $n = n_1 + n_2 + n_3$ e usiamo la relazione (7.1):

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (P_i - O) = \sum_{i=1}^{n_1} m_i (P_i - O) + \sum_{i=1}^{n_2} m_i (P_i - O) + \sum_{i=1}^{n_3} m_i (P_i - O) = M_1 (P_{0_1} - O) + M_2 (P_{0_2} - O) + M_3 (P_{0_3} - O),$$

$n_1 + n_2 + n_3 = n$ e P_{0_1}, P_{0_2}, P_{0_3} centri di massa dei sottosistemi di n_1, n_2, n_3 punti materiali rispettivamente

$M_1 = \sum_{i=1}^{n_1} m_i$ $\quad M_2 = \sum_{i=1}^{n_2} m_i$ $\quad M_3 = \sum_{i=1}^{n_3} m_i$ masse totali dei sottosistemi parziali di punti materiali,

con $M_1 + M_2 + M_3 = M$ massa totale del sistema degli n punti materiali

Allora, se ora consideriamo il sistema dei 3 punti materiali (P_{0_1}, M_1) (P_{0_2}, M_2) (P_{0_3}, M_3) risulterà che il loro centro di massa è $M(P_0 - O) = M_1 (P_{0_1} - O) + M_2 (P_{0_2} - O) + M_3 (P_{0_3} - O) = \sum_{i=1}^{n} m_i (P_i - O)$

E' sottinteso, e non lo diremo più in seguito, che questi passaggi sottintendono che il primo sottogruppo di n_1 vettori forza peso è equivalente al vettore $(P_{0_1}, -M_1\mathbf{k})$, il secondo gruppo al vettore $(P_{0_2}, -M_2\mathbf{k})$ e il terzo al vettore $(P_{0_3}, -M_3\mathbf{k})$ **che insieme costituiscono un sistema di 3 vettori applicati paralleli e concordi con Invariante Scalare nullo e quindi equivalente ad un solo vettore, il risultante $-M\,\mathbf{k}$, applicato nel relativo centro, $(P_0, -M\,\mathbf{k})$** (vedi paragrafo 2.4).

3) Dalle proprietà 1) e 2) segue che il centro di massa di un sistema materiale è interno ad una qualunque superficie convessa chiusa che contiene il sistema. In particolare se il sistema è piano il C.M. sarà interno a una qualunque linea chiusa contenente il sistema.

Ricordiamo, infatti che in uno spazio euclideo un insieme si dice convesso se per ogni coppia di punti X,Y dell'insieme, il segmento XY che li congiunge è interamente contenuto nell'insieme e quindi se X e Y si riferiscono a 2 punti materiali il loro centro di massa è interno al segmento XY e quindi è interno alla superficie convessa che li contiene.

4) Piano diametrale coniugato ad una direzione. Retta diametrale coniugata ad una direzione.

Si dice che un sistema materiale possiede un **piano diametrale coniugato ad una determinata direzione** se ad ogni punto P del sistema non appartenente al piano corrisponde un altro punto P' di uguale massa che si trova sulla parallela alla data direzione, passante per P, tale che il piano dimezza il segmento PP'.
Ne consegue , per le proprietà 1) e 2) , che il C.M. appartiene al piano diametrale.
Quindi, se il sistema ammette 2 piani diametrali il C.M. apparterrà alla retta intersezione dei due piani, se ne ammette 3 esso coincide con il punto intersezione dei tre piani.
Se la direzione coniugata è **ortogonale** al piano si dirà **piano di simmetria**

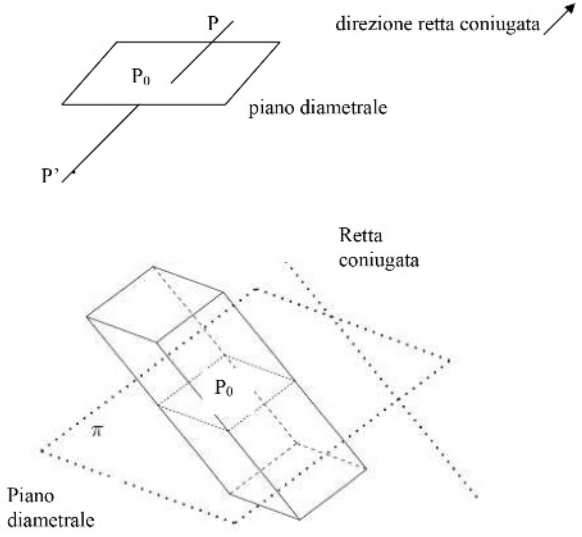
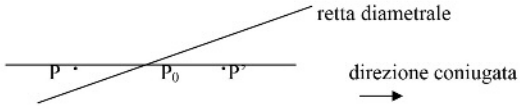


Figura 7.1 Piano diametrale

Analogamente, per i **sistemi piani** si parlerà di **retta diametrale** coniugata ad una data direzione e quindi di asse di simmetria e inoltre varranno analoghe considerazioni quando il sistema ammette 2 o 3 rette diametrali.

La retta diametrale divide il segmento PP', congiungente i 2 punti di uguale massa, in due parti uguali.



In particolare se se la retta diametrale è coniugata ad una direzione ad essa ortogonale si parlerà di **asse di simmetria: ad ogni punto P corrisponde un punto P' di eguale massa e posti su una retta orizzontale da parti opposte rispetto a tale asse verticale.**

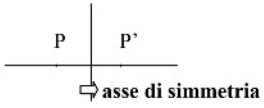


Figura 7.2 Asse di simmetria

Analogamente per la definizione di piano di simmetria.

7.3 Funzione densità nei Sistemi Continui

Sia C la regione dello spazio occupata da un corpo la cui massa è quindi distribuita in C. Indichiamo con ΔC un elemento di volume intorno ad un punto P(x,y,x) e con Δm la massa che lo occupa. Il rapporto $\frac{\Delta m}{\Delta C}$ si definisce come **densità** media dell'elemento di volume.
Se consideriamo volumetti intorno a P sempre più piccoli anche la massa al loro interno diminuisce. Il valore limite della densità media quando il volumetto tende a contrarsi in P, quando tale limite esiste, definisce la funzione densità nel punto P:

$$\rho(P) = \lim_{\Delta C \to P} \frac{\Delta m}{\Delta C} = \frac{dm}{dC}$$

in analogia con le ordinarie notazioni dell'Analisi per indicare quantità infinitesime.

Le dimensioni di ρ sono rispettivamente ml^{-3} , ml^{-2} , ml^{-1} a seconda che la regione C sia un volume (densità di volume), una superficie (lamina di spessore trascurabile, densità superficiale), una linea (filo di sezione trascurabile, densità lineare).

Formalmente, possiamo pensare che C sia composto da **infiniti punti materiali** di massa infinitesima $dm = \rho\, dC$ e definire quindi il centro di massa mediante un processo di limite della somma in (7.1) che viene sostituita da un integrale sul dominio C, tale che risulti:

$$M(P_0 - O) = \int_C \rho(P)(P - O)dC \qquad (7.6)$$

con $M = \int_C \rho(P)dC$ massa totale

Scelto un sistema di riferimento Oxyz, proiettando le (7.6) sugli assi, si avranno le seguenti coordinate di $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$Mx_0 = \int_C \rho(P)xdC \;, My_0 = \int_C \rho(P)ydC \;, Mz_0 = \int_C \rho(P)zdC \qquad (7.7)$$

Nel caso di densità costante, cioè di sistemi **omogenei**, si può portare ρ fuori dall'integrale e quindi

$$M = \rho \int_C dC = \rho\, MisC; \quad \rho MisC\ (P_0 - O) = \rho \int_C (P - O)dC \Rightarrow (P_0 - O) = \frac{1}{MisC} \int_C (P - O)dC \quad (7.8)$$

dove la ***Misura di* C sarà un volume , un'area o una lunghezza**. Notare che in questo caso il C.M. dipende solo dalla configurazione geometrica del corpo, ecco perché si può adottare per questo argomento anche la notazione di *Geometria delle Aree*.
E' evidente che tutte le proprietà del C.M. valide per un sistema discreto di punti materiali continuano a valere per un sistema continuo.

Ad esempio per quanto riguarda la **proprietà distributiva** del C.M. per un sistema omogeneo, si ha:

$$(P_0 - O) = \frac{1}{A}\int_C (P - O)dC = \frac{1}{A}\left[\int_{C_1} (P - O)dC + \int_{C_2} (P - O)dC\right] =$$

$$= \frac{1}{A}\left[A_1(P_{01} - O) + A_2(P_{02} - O)\right]$$

con $C_1 \cup C_2 = C$ e $A = A_1 + A_2, A_1 = misC_1; A_2 = misC_2$

dove abbiamo usato la proprietà di additività dell'integrale rispetto al dominio di integrazione.

Ci siamo così ricondotti al calcolo del centro di massa di due punti materiali P_{01} e P_{02} di masse rispettivamente A_1 e A_2

Esempio 7.2 Equilibrio di un corpo sospeso ad un punto. Equilibrio stabile, instabile, indifferente

Immaginiamo di voler attaccare ad una parete liscia un asse di legno mediante un chiodo nel punto si sospensione O in modo che essa stia in una posizione di equilibrio.

L'asse non deve cadere, quindi per la Prima Equazione Cardinale della Statica (vedi (3.15), (3.16)), il chiodo deve essere in grado di fornire una reazione, **R,** uguale e contraria al peso dell'asse, **p** = - M**g**, **k**, che possiamo considerare applicato nel baricentro P_0, grazie alle proprietà di equivalenza dei sistemi di vettori applicati paralleli (vedi (7.1)).
L'asse deve essere in equilibrio, cioè oltre a non cadere non deve neanche ruotare. Per questo deve essere verificata anche la Seconda Equazione Cardinale della Statica:

$$\mathbf{M}(O) = (P_0 - O) \wedge \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

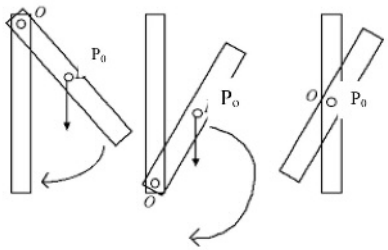
e quindi $$| \mathbf{M}(O) | = b\, Mg = 0$$

dove, vedi $(1.43)_{bis}$, b = braccio = distanza di O dalla retta passante per P_0 con direzione della retta di azione di p, che è verticale.

Quindi, per l'equilibrio il momento deve essere nullo e quindi è necessario che sia b=0, cioè che il chiodo ed il baricentro siano sulla stessa verticale.

Conclusione Un corpo sospeso è in **equilibrio** solo se b=0, cioè, **se il baricentro del corpo si trova sulla verticale passante per il punto di sospensione.**

Questa situazione si può verificare in tre modi differenti.



1. **Equilibrio stabile**. Il punto di sospensione O si trova **sopra** al baricentro P_o. Se ruotiamo un po' l'asse e poi lo lasciamo, questo tende a tornare nella posizione iniziale. E' il caso comune di un quadro appeso al muro.

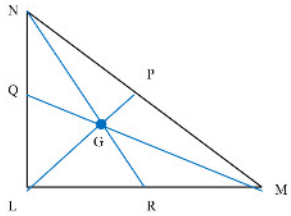
2. **Equilibrio instabile**. Il punto di sospensione si trova **sotto** al baricentro. Appena lo si tocca l'asse inizia a ruotare fino a portarsi nella posizione di equilibrio stabile.

3. **Equilibrio indifferente**. Il punto di sospensione **coincide** col baricentro. In altri termini abbiamo messo il chiodo esattamente nel baricentro. In qualsiasi modo ruotiamo l'asse di legno quando lo lasciamo rimane fermo (in equilibrio). *Da notare* che questa situazione deriva dalla definizione di Centro di Massa come quel punto dell'asse centrale che rimane invariato nella rotazione di tale asse al ruotare del sistema dei vettori forza peso dei punti materiali (vedi (2.24)).

7.4 Determinazione dei Centri di Massa (Baricentri) di particolari Sistemi Continui

Facendo uso delle proprietà del C. M. viste nel paragrafo 7.2 possiamo facilmente determinare graficamente il C.M. di alcuni sistemi piani omogenei.

Esempio 7.3 Baricentro di un Triangolo omogeneo



NG = 2/3 NR, GR = 1/3NR

Le mediane del triangolo in figura sono rette diametrali coniugate alle direzioni delle relative basi e quindi il C.M. dovendo appartenere a ognuna di esse coinciderà con il loro punto di intersezione.
Si verifica facilmente che il baricentro di un triangolo si trova ai 2/3 di ogni mediana, partendo dal vertice e a 1/3 di ogni mediana partendo dal punto medio del lato opposto.

Se si traccia un segmento passante per il baricentro e parallelo ad un lato del triangolo, esso intercetta l'altezza relativa a tale lato (base) suddividendola in due parti tali che una è lunga il doppio dell'altra, similmente come accade per la mediana del lato.

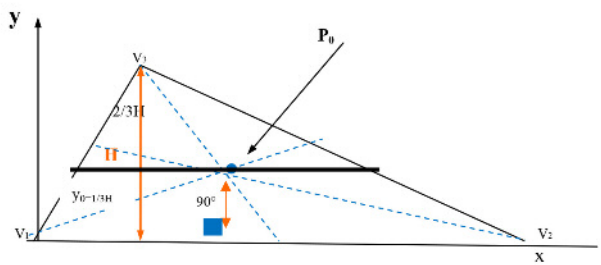
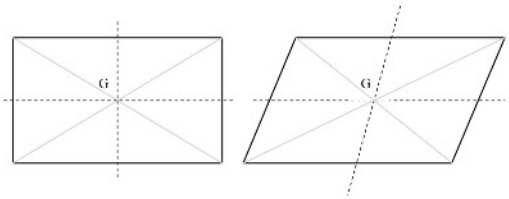


Figura 7.3 La distanza del baricentro da ciascun lato è 1/3 dell'altezza ad esso relativa.

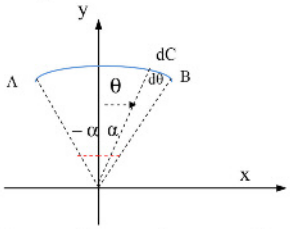
Esempio 7.4 Baricentro di un Rettangolo e di un parallelogramma omogenei con considerazioni geometriche



Ciascuna **diagonale** del rettangolo e del parallelogramma è una **retta diametrale coniugata alla direzione dell'altra** e quindi il C.M. dovendo appartenere ad entrambe sarà il punto della loro intersezione.
Poiché queste due figure sono dotate di una coppia di assi di simmetria si noti che il C.M. è anche il loro punto di intersezione.

Esempio 7.5 Calcolo analitico del Baricentro di un Arco di Circonferenza e di un Settore Circolare

Si consideri un sistema materiale omogeneo costituito da un arco di circonferenza C di raggio R e di apertura 2α.



Il centro di massa si troverà sull'asse di **simmetria** y, quindi $x_0 = 0$, avendo fissato il sistema di riferimento Oxy come in figura.
Il sistema ha una densità lineare costante ρ che per semplicità, da qui in seguito, porremo uguale a 1 .
Dobbiamo utilizzare le forme integrali (7.7) , (7.8). Data la geometria di tipo circolare, converrà usare le coordinate polari.

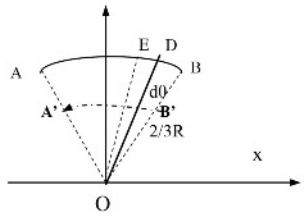
L'elemento di arco è $dC = R\,d\theta$, $\theta \in [-\alpha, \alpha]$, mis $C = 2R\alpha$,

$y = R\cos\theta$ è la coordinata polare del generico punto P dell'arco C

Quindi, il centro di massa si troverà sull'asse di simmetria (asse delle y) e, utilizzando gli strumenti forniti nel primo corso dell'Analisi Matematica, avrà coordinata

$$y_0 = \frac{1}{\text{Mis}C}\int_C y\,dC = \frac{1}{2R\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\theta R d\theta = \frac{R}{2\alpha}\left[\text{sen}\alpha - \text{sen}(-\alpha)\right] = \frac{R\,\text{sen}\alpha}{\alpha}$$

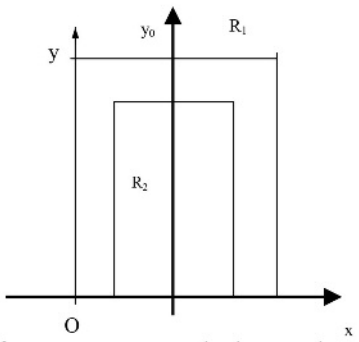
Consideriamo ora il settore circolare AOB di raggio R e apertura 2α, come in figura, e scomponiamolo in settori circolari elementari come EOB, di apertura $d\theta$, il cui centro di massa si trova su OD a 2/3 dal centro O (essendo equiparabile a un triangolo infinitesimo di altezza OD=R), allora il luogo descritto da questi centri di massa parziali forma l'arco di circonferenza A'B' di raggio $\frac{2}{3}R$ con asse di simmetria ancora l'asse y e quindi possiamo la proprietà distributiva del centro di massa e utilizzare il risultato calcolato prima ottenendo: $y_o = \frac{2}{3}\frac{R\,sen\alpha}{\alpha}$



Settore Circolare

In particolare, per un **semidisco** di centro O e raggio R, essendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$, risulta $y_o = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$

Esempio 7.6 Baricentro di una figura forata



La figura può essere considerata come una figura forata ottenuta sottraendo al rettangolo esterno R_1 di altezza 7 cm e base 5cm il rettangolo interno R_2 di altezza 6cm e base 3cm.
Scegliamo la terna di riferimento Oxyz come in figura. L'asse y_0 è un asse di simmetria materiale per cui i baricentri dei due rettangoli si troveranno su di esso.

Dalla proprietà **distributiva** del Centro di Massa, qui applicato alla differenza di due figure, otteniamo:

$$(P_0 - O) = \frac{1}{A}\left[A_1(P_{01} - O) + A_2(P_{02} - O)\right]$$

e quindi

$$y_o = \frac{A_1 y_{o_1} - A_2 y_{o_2}}{A_1 - A_2} \quad , \quad x_o = \frac{A_1 x_{o_1} - A_2 x_{o_2}}{A_1 - A_2}$$

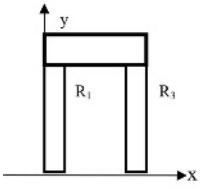
Essendo l'area totale (massa totale) A = Area del rettangolo R_1 – Area del rettangolo $R_2 = 17$ e $y_{o1} = 3{,}5$ la coordinata del baricentro del rettangolo R_1, $y_{o2} = 3$ per R_2, $x_{o1} = 2{,}5$ e $x_{o2} = 2{,}5$, si ha

$$y_o = \frac{A_1 y_{o_1} - A_2 y_{o_2}}{A_1 - A_2} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3{,}5 - 6 \cdot 3 \cdot 3}{35 - 18} \cong 4$$

$$x_0 = \frac{7 \cdot 5 \cdot 2{,}5 - 6 \cdot 3 \cdot 2{,}5}{35 - 18} \cong 2{,}5$$

Nota che $A_1 y_{o_1} - A_2 y_{o_2}$ è il momento statico rispetto all'asse x dell'intero sistema e analogamente per il momento statico rispetto all'asse y.

In alternativa, si può pensare alla figura come composta da 3 rettangoli scelti come in figura. L'asse y è ancora asse di simmetria:



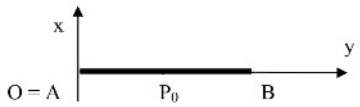
$$y_{o_1} = 3 \ , \quad y_{o_2} = 6{,}5 \ , \quad y_{o_3} = 3$$

$$y_o = \frac{A_1 y_{o_1} + A_2 y_{o_2} + A_3 y_{o3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \cdot 6{,}5 + 1 \cdot 6 \cdot 3}{6 + 5 + 6} \cong 4$$

$$x_o = \frac{A_1 x_{o_1} + A_2 x_{o_2} + A_3 x_{o3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 5 \cdot 2{,}5 + 1 \cdot 6 \cdot 4{,}5}{6 + 5 + 6} \cong 2{,}5$$

Esempio 7.7 Baricentro di un'asta

Verifichiamo che il baricentro di un'asta omogenea AB di lunghezza L (densità posta=1) si trova nel suo punto di mezzo in quanto deve appartenere al suo asse di simmetria ortogonale.
Scelto il sistema di riferimento Oxy come in figura



poiché l'asta ammette un asse di simmetria ortogonale, per le proprietà del baricentro, esso appartiene all'asse x , da cui risulta $y_o = 0$.
Usando la (7.8) si ha:

$$x_o = \frac{1}{M}\int_0^L \rho(x)\, x\,dx \quad \text{dove } M = \int_0^L \rho(x)\,dx \text{ è la massa totale,}$$
$$\text{con } dm = \rho(x)dx, \text{ massa elementare, dx elemento infinitesimo di lunghezza}$$

Essendo l'asta omogenea e ponendo la sua densità costante uguale a 1, si ha:

$$x_o = \frac{1}{M}\int_0^L x\,dx \qquad \text{dove } M = \int_0^L dx = L \equiv \text{misura lunghezza dell'asta}$$
$$x_o = \frac{1}{L}\left|\frac{1}{2}x^2\right|_0^L = \frac{L}{2}$$

7.5 RICHIAMI SULL'INTEGRAZIONE DOPPIA

Volendo procedere al calcolo integrale del Baricentro di alcune figure piane occorre conoscere gli strumenti dell'integrazione di una funzione di due variabili che qui vengono brevemente richiamati poiché il corso a cui queste dispense si riferiscono è incardinato al I anno, e quindi antecedente al corso di Analisi Matematica 2 dove solitamente vengono trattati questi argomenti.

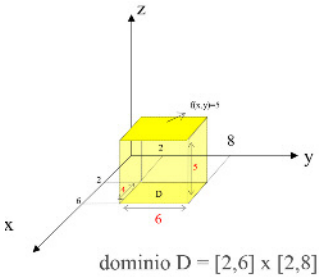
Una funzione di due variabili f(x,y) è una funzione che fornisce un valore numerico se si assegnano i valori di 2 variabili. Una funzione generica di due variabili si scrive come z = f(x,y).
Si nota che il grafico di una funzione reale di due variabili è un sottoinsieme di R^3 rappresentabile nello spazio ordinario. Tale grafico è una superficie nello spazio. E' evidente che non posso disegnare il grafico di una funzione di 3 variabili f(x,y,z) in quanto avrei bisogno di uno spazio a 4 dimensioni!

Come per il caso degli integrali di funzioni di una variabile, il procedimento di integrazione per funzioni di due variabili nasce in modo naturale nelle applicazioni.

Il calcolo di un volume

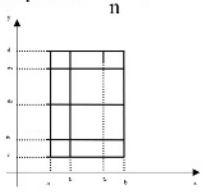
Consideriamo una funzione f(x, y) continua, positiva e definita su un dominio rettangolare $D = [a, b] \times [c, d] \in R^2$. Per calcolare il volume della zona determinata dal grafico di f e dal piano xy e con base D, si procede in maniera analoga a quanto visto per il problema dell'area per funzioni di una variabile.

Esempio z =f(x,y)=costante =5 : piano parallelo al piano xy



dominio D = [2,6] x [2,8]

Si suddividono gli intervalli [a, b] e [c, d]: sia n un numero naturale assegnato e consideriamo una partizione di [a, b] in n intervallini tutti di ampiezza $\frac{b-a}{n}$ e una partizione di [c,d] in n intervallini utti di ampiezza $\frac{d-c}{n}$.

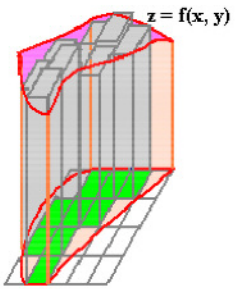


Otteniamo di conseguenza una partizione del rettangolo [a, b] × [c, d] in n^2 rettangolini $I_{h,k}$ h,k =1,..n di area $A_{h,k} = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}$

Sia $t_{h,k} \in I_{h,k}$ un punto qualsiasi scelto in ciascun rettangolino , il prodotto $f(t_{h,k}) \times A_{h,k}$ è il volume del parallelepipedo di area di base $A_{h,k}$ e altezza $z_{h,k} = f(t_{h,k})$. Si definisce integrale doppio di f(x,y) sul rettangolo D =[a, b] × [c, d], il limite, se esiste, delle cosiddette Somme di Cauchy-Riemann, che rappresentano i volumi dei parallelepipedi corrispondenti alle partizioni

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{h,k=1}^{n} A_{h,k} f(t_{h,k}) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Quindi, data una f(x,y), non necessariamente sempre positiva , l'integrale fornisce il valore del volume (con segno) del solido della regione di spazio avente per base D, per tetto la superficie corrispondente al grafico di z = f(x, y) e come superficie laterale quella formata dalla infinite rette parallele all'asse z che congiungono il bordo di D con i punti che giacciono su f(x, y).



Nota che, come nel caso di 1 variabile, se f(x,y) = costante =1 si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{h,k=1}^{n} A_{h,k} = \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} = (b-a)(d-c) = \iint_D dx\,dy = (b-a)(d-c) = \text{Area del rettangolo } D$$

Valgono le proprietà analoghe a quelle viste per l'integrale con una sola variabile.
Esempio, proprietà di linearità

$$\iint_D (af+bg)\,dx\,dy = a\iint_D f\,dx\,dy + b\iint_D g\,dx\,dy$$

7.5.1 Formule di Riduzione per Domini Rettangolari

Riduzione di un integrale doppio su un dominio rettangolare.

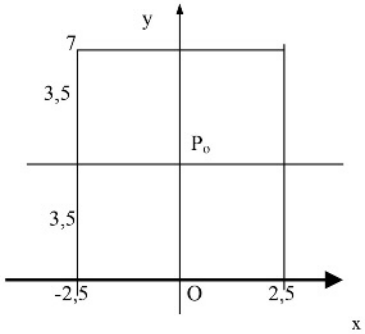
Il calcolo di un integrale doppio avviene mediante la *riduzione* al calcolo di due integrali, ciascuno rispetto ad una sola delle due variabili *x*, *y*.
Descriviamo qui il caso più semplice, nel quale il dominio *A* è un rettangolo con i lati paralleli agli assi. L'integrale doppio si calcola integrando separatamente «rispetto alla variabile *y*», e poi «rispetto alla variabile x»,oppure invertendo i ruoli delle variabili *x* e *y*, ossia riservando alla variabile *x* l'integrale interno e alla *y* quello esterno, nel modo seguente:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \qquad (7.8)$$

Esempio 7.8 Calcolo del baricentro di un rettangolo

Si vuole determinare il baricentro del rettangolo esterno R_1 dell'Esempio 7.6 con base di 5cm e altezza 7cm.
Relativamente alla coppia di assi cartesiani scelta, con l'asse y asse di simmetria, il dominio rettangolare di integrazione è:

$D = [\,-2{,}5\,,\,+2{,}5] \times [0\,,\,7]$



Quindi, da (7.8) si ha

$$y_o = \frac{1}{35}\iint_{[-2,5,+2,5]\times[0,7]} y \; dxdy = \frac{1}{35}\int_{-2,5}^{+2,5}\left(\int_0^7 y \; dy\right)dx = \frac{1}{35}\int_{-2,5}^{+2,5}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^7 dx =$$

$$\frac{1}{35}\cdot\frac{49}{2}\int_{-2,5}^{2,5} dx = \frac{1}{35}\cdot\frac{49}{2}\cdot 5 = 3{,}5$$

Oppure, equivalentemente

$$y_o = \frac{1}{35}\iint_{[-2,5,+2,5]x[0,7]} y\,dxdy = \frac{1}{35}\int_0^7 \left(\int_{-2,5}^{2,5} y dx\right)dy =$$

$$\frac{1}{35}\cdot\int_0^7 y\left(\int_{-2,5}^{2,5} dx\right)dy = \frac{1}{35}\int_0^7 5ydy = \frac{1}{35}.5\cdot\frac{49}{2} = 3,5$$

Tale risultato è in accordo con la proprietà che il baricentro si trova nel punto di intersezione di due assi di simmetria.

7.5.2 Caso di dominio non rettangolare. Domini normali. Formule di Riduzione per Domini Normali

Rimandando al corso di Analisi per una trattazione rigorosa riportiamo alcune definizioni e tecniche di integrazioni utili.

Se il dominio di integrazione Ω non è un rettangolo, si usa considerare un rettangolo che lo contenga , al seguente modo:

Sia f: $\Omega \to R, \Omega \subset R^2$ limitato **e sia** $[a,b]\times[c,d] \supseteq \Omega$

sia inoltre

$$\overline{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) \text{ se } (x,y)\in\Omega \\ 0 \text{ se } (x,y)\in[a,b]\times[c,d]\setminus\Omega \end{cases}$$

allora se $\overline{f}$ **è integrabile in** $[a,b]\times[c,d]$ **si dirà che f è integrabile in** Ω **e risulta**

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \overline{f}(x,y)dxdy$$

Si dimostra che il valore dell'integrale non dipende dalla scelta del rettangolo usato.

Non è sempre possibile operare in questo modo, è quindi necessario restringere il discorso a funzioni definite su particolari domini (più che sufficienti per gli scopi del corso), come segue:

1) Dominio y-semplice

Sia E l'insieme di R^2:

$$E = \{ x, y \in R^2 : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x) \}$$

Si dice che E è un dominio normale rispetto all'asse x con $\alpha, \beta : [a,b] \to R$ funzioni continue
Si usa anche dire che *E* è un **dominio y-semplice**: l'intersezione di *E* con una retta normale all'asse x, quindi parallela all'asse y, o è vuota o è un segmento

2) Dominio x-semplice

Sia F l'insieme di R^2:

$$F = \{ x, y \in R^2 : c \le y \le d,\ \gamma(x) \le x \le \delta(x) \}$$

Si dice che F è un insieme normale rispetto all'asse y con $\gamma, \delta : [c,d] \to R$ funzioni continue
Si usa anche dire che *F* è un **dominio x-semplice**: l'intersezione di F con una retta normale all'asse y , e quindi parallela all'asse x, o è vuota o è un segmento.

Un insieme $E \subset R^2$ **si dice semplice se è x-semplice oppure y-semplice**; regolare se è l'unione di un numero finito di insiemi semplici.
Gli insiemi regolari(per esempio i poligoni regolari)sono insiemi piani chiusi e limitati.

Nelle nostre applicazioni in Geometria delle Masse, noi utilizzeremo solo domini regolari e funzioni integrabili.
Le formule di riduzione dell'integrale doppio per domini normali sono:

a) per un dominio E, y-semplice:

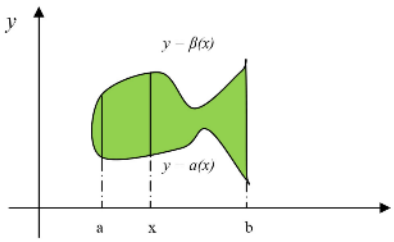
$$\iint_E f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx \qquad E = \{ x, y \in R^2 : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x) \} \qquad (7.9)$$

b) per un dominio F, x-semplice :

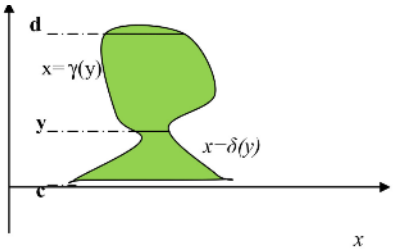
$$\iint_F f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx \right) dy \qquad F = \{ x, y \in R^2 : c \le y \le d,\ \gamma(x) \le x \le \delta(x) \} \qquad (7.10)$$

c) per un dominio sia x-semplice che y-semplice :

$$\int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx \right) dy$$



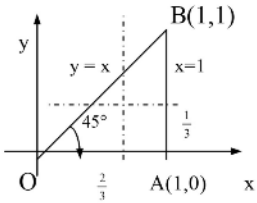
dominio y-semplice



dominio x-semplice

Esempio 7.9 Calcolo Baricentro Triangolo

Il Triangolo è un dominio sia x – semplice che y - semplice



Il dominio T corrispondente al triangolo in figura sarà:

$$T = \{\, x, y \in R^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x \,\}\ \text{, y-semplice}$$

oppure

$$T = \{\, x, y \in R^2 : 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1 \,\}\ \text{, x-semplice}$$

$$y_o = \frac{1}{MisC}\int_C y\,dC \quad , \quad x_o = \frac{1}{MisC}\int_C x\,dC,$$

Considerato T come dominio y-semplice e utilizzando la (7.9) si ha:

$$x_o = \frac{1}{\text{Area}T}\int_0^1 [\int_0^x xdy]dx \; ; \quad y_o = \frac{1}{\text{Area}T}\int_0^1 [\int_0^x ydy]dx$$

$$x_o = 2\int_0^1 x[\int_0^x dy]dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}; \quad y_o = 2\int_0^1 [\int_0^x ydy]dx = 2\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{3}$$

Considerato T come dominio x-semplice e utilizzando la (7.10) si ha:

$$x_o = 2\int_0^1 [\int_y^1 xdx]dy; \quad y_o = 2\int_0^1 [\int_y^1 ydx]dy$$

$$x_o = 2\int_0^1 [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^2]dy = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad ; \quad y_o = 2\int_0^1 [(1-y)y]dy = 2[(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3)]_0^1 = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$$

Si verifica graficamente tale risultato (vedi Esempio 7.3), essendo P_o il punto di incontro della retta parallela alla base AB e passante per il punto sull'altezza OA ad essa relativa alla distanza di $\frac{2}{3}$ dal vertice O con la retta parallela alla base OA e passante per il punto sull'altezza AB ad essa relativa a distanza di $\frac{1}{3}$ dalla base stessa.

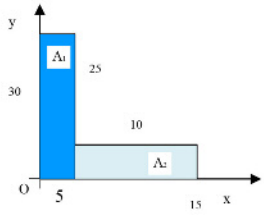
Proprietà di additività sulla scomposizione di domini normali (analoga a quella vista nel caso di una sola variabile) è:

se $C = E_1 \cup E_2$ con $E_1 \cap E_2 = \oplus$ insieme vuoto, allora

$$\iint_C f(x,y)dxdy = \iint_{E_1} f(x,y)dxdy + \iint_{E_2} f(x,y)dxdy$$

Esempio 7.10 Calcolo del Baricentro di una sezione ad L

La figura è composta da un rettangolo di base 5 e altezza 30 e da un altro rettangolo di base 10 e altezza 5, entrambi omogenei.



Per la proprietà di additività sopra enunciata si ha:

$$y_o = \frac{1}{MisC}\int_C ydC = \frac{1}{MisC}[\int_{C_1} ydC + \int_{C2} ydC]; \quad x_o = \frac{1}{MisC}[\int_{C_1} xdC + \int_{C_2} xdC]$$

dove C_1 è il rettangolo di base 5 e altezza 30 mentre C_2 è il rettangolo di base 10 e altezza 5

e $misC = MisC_1 + misC_2$

Essendo domini rettangolari il calcolo degli integrali doppi si sviluppa utilizzando la (7.8).
Quindi si ha :

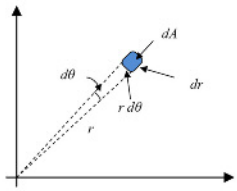
$$yo = \frac{1}{150+75}[\int_0^5\int_0^{30} ydxdy + \int_5^{15}\int_0^5 ydxdy] = 10{,}5 \qquad x_o = \frac{1}{225}[\int_0^5\int_0^{30} xdxdy + \int_5^{15}\int_0^5 xdxdy] = 4{,}11$$

Esempio 7.11 Baricentro Disco omogeneo

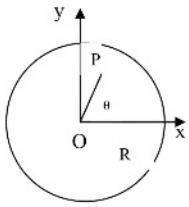
Rimandando al relativo corso di Analisi per una dimostrazione rigorosa del cambiamento di variabili (calcolo del determinante della matrice Jacobiana della trasformazione)in un integrale doppio, osserviamo che se usiamo le coordinate polari r e θ possiamo scegliere come elemento

d'area dA il rettangolino di base lunga $r\mathrm{d}\theta$ e altezza dr *e quindi risulterà*

$$\mathrm{d}A = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$



Verifichiamo che il baricentro di un disco omogeneo di raggio R coincide con il suo centro.



Il generico punto P(x,y) interno al disco, rispetto al riferimento come in figura avrà coordinate polari

$$x = r\cos\theta \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \ , \quad r \in [0,R] \ , \ \theta \in [0,2\pi)$$

Quindi si avrà

$$y_o = \frac{1}{\mathrm{Mis}C}\int_C y\,dC \quad , \quad x_o = \frac{1}{\mathrm{Mis}C}\int_C x\,dC, \quad \text{con } dC \equiv dA = r\,d\theta\,dr \quad \text{e Mis } C = \pi R^2$$

$$x_o = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\int_0^R r^2\,dr = \frac{1}{\pi R^2}\,|\,\mathrm{sen}\theta\,|_0^{2\pi}\,|\,\frac{1}{3}r\,|_0^R = 0$$

e analogamente

$$y_o = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R [r\,\mathrm{sen}\theta\,dr]\,d\theta = 0$$

Nel caso del semidisco risulta $r \in [0,R]$ e $\theta \in [0,\pi)$, quindi si ottiene:

$$x_o = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta\int_0^R r^2\,dr = \frac{2}{\pi R^2}\,|\,\mathrm{sen}\theta\,|_0^{\pi}\,|\,\frac{1}{3}r\,|_0^R = 0$$

e

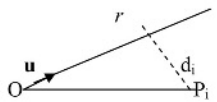
$$y_o = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^{\pi}\int_0^R [r\,\mathrm{sen}\theta\,dr]\,d\theta = \frac{2}{\pi R^2}\cdot\frac{1}{3}R^3[-\cos\theta]_0^{\pi} = \frac{2R}{3\pi}[+1+1] = \frac{4R}{3\pi}$$

In accordo con il risultato trovato nel paragrafo 7.5.

7.6 Momenti d'Inerzia. Teorema di Huygens

Consideriamo un sistema di punti materiali (P_i, m_i), i=1,…n, e una retta orientata *r* con versore **u** e sia O un punto su di essa, **si definisce momento d'inerzia (assiale)** del sistema rispetto alla retta la somma dei prodotti delle masse per il quadrato delle rispettive distanze da essa, in formula:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i d^2{}_i \ \text{ con } \ d_i = |u \wedge (P_i - O)| \quad , O \in r \qquad (7.11)$$



Si noti che se invece di una retta sono assegnati un punto o un piano si può anche parlare di **momenti d'inerzia polare o planare** con d_i distanze dal punto o dal piano rispettivamente.

Nel caso di un sistema **continuo** si avrà:

$$I = \int_C \rho(P)\left[\mathbf{u} \wedge (P-O)^2\right]dC = \int_C \rho(P)d(P)^2 dC \qquad (7.12) \qquad (7.12)$$

dove $d(P)$ denota la distanza del generico punto P, della regione C, dalla retta *r*.

Fissando una terna di assi cartesiani Oxyz, se la retta *r* coincide con l'asse x, y o z si avrà, di volta in volta, per i momenti d'inerzia relativi:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2) && \text{asse x} \\ B &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + z_i^2) && \text{asse y} \\ C &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2) && \text{asse z} \end{aligned} \qquad (7.13)$$

$$\left[\ A = \int_C \rho(P)(y^2+z^2)dC\ ,\ B = \int_C \rho(P)(x^2+z^2)dC\ ,\ C = \int_C \rho(P)(x^2+y^2)dC\ \right] \qquad (7.13)\text{bis}$$

Definizione I: si chiama ***giratore d'inerzia*** del sistema rispetto alla retta *r* la distanza così definita:

$$\delta = \sqrt{\frac{I}{M}} \quad , \quad M\delta^2 = I \quad , \quad M = \text{massa totale}$$

il cui significato è quello di essere la distanza di quel punto materiale di massa M per avere un momento d'inerzia pari a quello dell'intero sistema(questa definizione sarà utilizzata in seguito nel definire l'Ellisse di Culmann).

Definizione II Si chiamano ***momenti centrifughi o prodotti d'inerzia*** del sistema rispetto ai piani coordinati le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i && \text{rispetto ai piani } y=0 \text{ e } z=0 \\ E &= \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i && \text{rispetto ai piani } x=0 \text{ e } z=0 \\ F &= \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i && \text{rispetto ai piani } x=0 \text{ e } y=0 \end{aligned} \qquad (7.14)$$

dove sottolineiamo che essi sono somme di **prodotti di masse per le loro distanze dalle coppie di piani coordinati.** Si può parlare di momenti centrifughi rispetto a coppie di piani qualsiasi.

Queste definizioni si estendono direttamente al caso continuo,

$$D = \int_C \rho(P) yz dC \qquad E = \int_C \rho(P) xz dC \qquad F = \int_C \rho(P) xy dC \qquad (7.14)bis$$

Nel caso di un sistema materiale piano, ad esempio appartenente al piano z=0, risultano D=E=0

Il TEOREMA DI HUYGENS

Come vedremo in seguito, questo Teorema semplifica notevolmente il calcolo dei momenti d'inerzia.

Sia r_0 una retta passante per il centro di massa P_0 e parallela alla retta r *(stessa direzione data da* **u**) passante per O e sia I_0 il momento d'inerzia del sistema rispetto a r_0, allora si verifica che il momento d'inerzia I rispetto ad r è dato da :

$$I = I_0 + Mc^2 , \qquad (7.15)$$

dove c è la distanza tra le due rette r e r_0 e M è la massa totale.

Infatti, sommando e sottraendo P_0 , si ha

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i \left|\underline{u} \wedge (P_i - O)\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left|\underline{u} \wedge [(P_i - P_0) + (P_0 - O)]\right|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \left|\underline{u} \wedge (P_i - P_0)\right|^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \left|\underline{u} \wedge (P_0 - O\right|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} m_i \left|\underline{u} \wedge (P_i - P_0)\right| \cdot \left|u \wedge (P_0 - O)\right|$$

$$= \quad I_0 \quad + \quad Mc^2 \quad + \quad \text{zero}$$

L'ultimo termine si annulla per la definizione (7.1) di P_0 quando si scelga la terna cartesiana con origine in P_0 .

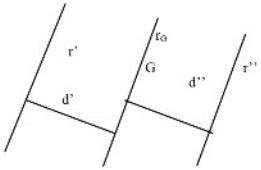
Nota che fra tutte le rette con direzione assegnata quella rispetto alla quale il **momento d'inerzia è minimo** è la retta baricentrale.

Come conseguenza del teorema di Huygens si ottiene una legge di variazione del momento d'inerzia rispetto a **due rette r' ed r" parallele qualsiasi non passanti per il baricentro.** Infatti, si consideri una terza retta r_G parallela alle prime due, ma passante per il baricentro e si applichi due volte il teorema di Huygens

$$I' = I_G + M\, d'^2 \qquad I'' = I_G + M\, d''^2$$

e quindi, sottraendo membro a membro, troviamo:

$$I'' = I' + M\,(d''^2 - d'^2) \qquad (7.16)$$

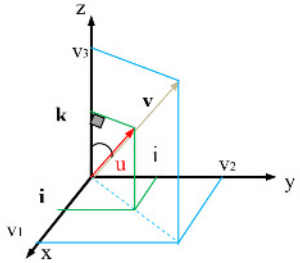


7.6 Ellissoide d'Inerzia

Abbiamo appena visto il legame fra i momenti d'inerzia rispetto a rette parallele fra loro, viene naturale chiedersi come si può determinare un legame fra i momenti d'inerzia relativi a rette uscenti da uno stesso punto, aventi direzioni fra loro differenti. In altri termini **ci domandiamo come varia il momento d'inerzia al variare del versore u di una retta uscente dall'origine O di un sistema cartesiano scelto arbitrariamente.**

Facciamo variare la retta r di versore $\mathbf{u}$, in una stella di centro O e siano α, β e γ i coseni della generica retta del fascio rispetto ad una terna di assi cartesiani di centro O e versori **i, j, k**:

$$\alpha = \cos(\hat{\mathbf{ui}}), \beta = \cos(\hat{\mathbf{uj}}), \gamma = \cos(\hat{\mathbf{uk}}))$$



Quindi, essendo $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$, utilizzando la matrice simbolica per il calcolo del prodotto vettoriale (vedi (1.35)), risulta

$$\mathbf{u} \wedge (P_i - O) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = i(\beta z_i - \gamma y_i) - j(\alpha z_i - \gamma x_i) + k(\alpha y_i - \beta x_i)$$

e, eseguendo semplici calcoli, si ottiene

$$I_u = \sum_{i=1}^{n} m_i \left| \underline{u} \wedge (P_i - O) \right|^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta \qquad (7.17)$$

con A,B,C, D, E,F momenti e prodotti d'inerzia dati da (7.13) e (7.14).

Per ora stiamo escludendo il caso $I_u = 0$, cioè quando tutti i punti del sistema appartengono ad una stessa retta (per cui risulta $d_i = 0$, $\forall i$) e quindi la (7.17) è una *forma quadratica omogenea* nei coseni direttori α, β, γ, e definita positiva in quanto è sempre $I_u > 0$.

La (7.17) è quindi una legge di variazione del momento d'inerzia rispetto ad una retta quando questa ruota intorno ad un punto O. A tale legge possiamo dare una espressiva traduzione geometrica: riportiamo su *r* due punti P e P', da **parti opposte** rispetto ad O e ad una distanza da O pari a

$$PO = P'O = \frac{\lambda}{\sqrt{I_u}} \qquad (7.18)$$

con λ un parametro positivo arbitrario (di scala).
Quindi P e P' risultano **simmetrici rispetto ad** O. Operando questo procedimento su tutte le rette della stella di centro O, cioè al variare dei coseni direttori di **u** , il punto P (e quindi P') descrive una superficie chiusa (perché abbiamo escluso il caso $I_u = 0$ e quindi tutti i punti P sono al finito) e simmetrica rispetto ad O per costruzione (O centro di simmetria).

Per vedere di quale superficie si tratti basta considerare **le coordinate del generico punto P(x,y,z)** sulla superficie e sulla retta r di versore **u**. Sia

$$(P\text{-}O) = |P\text{-}O|\mathbf{u}\,, \quad \mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}\,,$$

rispetto ad una terna cartesiana fissata di origine O.
Essendo

$$(P\text{-}O) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

in componenti si ottiene:

$$x = \alpha|P\text{-}O|\,,\ y = \beta|P\text{-}O|\,,\ z = \gamma|P\text{-}O| \quad , \quad |P\text{-}O| = PO = \frac{\lambda}{\sqrt{I_u}}$$

da cui possiamo ricavare α, β, γ e sostituire in (7.17) per ottenere:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2E\,xz - 2Fxy = \lambda^2 \qquad (7.19)$$

Dalla Geometria riconosciamo in questa espressione quadratica definita positiva l'equazione di una **famiglia di ellissoidi al variare di** λ**,** detti ***ellissoidi d'inerzia del sistema dato di punti materiali rispetto al punto O e al parametro*** λ.

Da non confondere le coordinate x, y, z dei punti della superficie geometrica dell'ellissoide con le coordinate dei punti materiali x_i , y_i , z_i , contenute nei coefficienti A,B,C,D,E,F.

Se O coincide con il baricentro la (7.19) si dirà ellissoide centrale d'inerzia.

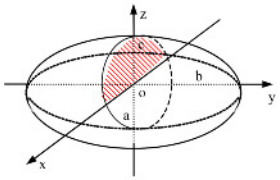
Una volta calcolati i momenti d'inerzia A,B,C e i prodotti d'inerzia D,E,F, fissato il valore di λ, se si costruisce graficamente l'ellissoide, basta misurare la lunghezza del segmento PO intercettato sulla retta *r passante per O* per ottenere graficamente il valore del momento d'inerzia del sistema materiale rispetto ad essa:

$$I_u = \frac{\lambda^2}{PO^2}$$

Ricordiamo dalla Geometria che un l'ellissoide ammette una terna di assi cartesiani detti *principali* rispetto ai quali si può scrivere l' equazione nella cosiddetta forma canonica in termini dei semiassi a,b,c:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (7.20)$$

In cui, se $a \neq b \neq c$, ci sarà un semiasse maggiore, un semiasse intermedio e un semiasse minore.



(a>b>c)

In tal caso, l'ellissoide possiede tre piani di **simmetria geometrica** a due a due ortogonali detti **piani principali**, le cui intersezioni sono **tre assi di simmetria detti assi principali**.
Infatti osserviamo che se P(x,y,z) sta sulla superficie dell'ellissoide anche P'(-x,-y,z) sta su tale superficie perché le sue coordinata soddisfano la (7.20) ma questo vuol dire che l'asse z è di simmetria e analogamente per gli altri 2 assi x e y. Inoltre se P(x,y,z) sta sulla superficie dell'ellissoide anche P'(-x,y,z) sta su tale superficie e questo vuol dire che il piano x=0 è di simmetria. Analogamente accade per i piani y=0 e z=0.
Se due dei semiassi sono uguali allora l'ellissoide sarà di rotazione attorno ad uno degli assi.
Se i tre semiassi sono uguali l'ellissoide degenera in una sfera di centro O.

Confrontando la generica equazione (7.20) con l'equazione (7.19) dell'ellissoide d'inerzia ne segue che rispetto ad una terna di assi principali, risulta:

$$D=E=F=0$$

cioè devono essere nulli i momenti centrifughi rispetto alle coppie di piani coordinati e quindi si ha la seguente equazione dell'ellissoide d'inerzia

$$A_0 x^2 + B_0 y^2 + C_0 z^2 = \lambda^2 \tag{7.21}$$

In questo caso gli assi della terna principale dell'ellissoide d'inerzia sono detti assi principali d'inerzia e A_0 , B_0 , C_0 **sono i relativi momenti principali d'inerzia.**

Riferirsi ad una terna principale d'inerzia è il caso più favorevole per il calcolo di I_u in quanto non bisogna calcolare tre quantità su sei nella (7.17).

Confrontando la (7.21) con la(7.20) si vede anche che le lunghezze dei semiassi dell'ellissoide d'inerzia saranno quindi note in funzioni dei momenti d'inerzia rispetto ai 3 assi principali d'inerzia, come segue:

$$a = \frac{\lambda}{\sqrt{A_0}}, b = \frac{\lambda}{\sqrt{B_0}}, c = \frac{\lambda}{\sqrt{C_0}} \tag{7.22}$$

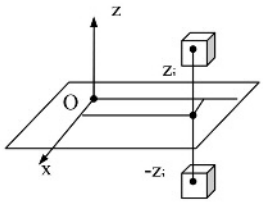
essendo A_0 , B_0 , C_0 i valori dei tre momenti d'inezia del sistema materiale rispetto agli assi principali d'inerzia x, y e z, si deduce che a uno di essi corrisponderà un **momento d'inerzia massimo (semiasse di lunghezza minima)** e ad un altro **un momento d'inerzia minimo (semiasse di lunghezza massima).**

7.7 Ricerca degli Assi Principali d'Inerzia

Come si è visto la conoscenza di una terna principale d'inerzia è particolarmente vantaggiosa perché consente di rappresentare l'ellissoide d'inerzia mediante tre soli elementi non nulli A,B,C in quanto in tal caso i prodotti d'inerzia D,E,F risultano nulli.
Qui di seguito esponiamo un metodo per determinare tali assi nel caso particolare di un sistema che ammetta un piano di simmetria materiale.

Supponiamo che , con riferimento alla terna Oxyz, il **piano z=0** sia un piano di **simmetria materiale** per il sistema (quindi il centro di massa appartiene a tale piano) cioè, ad ogni punto

materiale $P_i(x_i,y_i,z_i)$ corrisponde un punto materiale $Q_i(x_i,y_i,-z_i)$, essendo le masse in P_i e Q_i uguali (vedi paragrafo 7.2, proprietà 4)). Nota che quanto diremo vale per qualunque piano di simmetria.



Segue che, poiché ad ogni punto $P_i(x_i,y_i,z_i)$ corrisponde un punto $P_i'(x_i,y_i,-z_i)$ con eguale massa, le somme D ed E si annullano perché costituite da coppie di termini uguali ed opposti.

$$D=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i = 0 \quad \text{e} \quad E=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i = 0$$

oppure, nel caso continuo

$$D = \int_{C_1 \cup C_2} \rho(P)yzdC = \int_{C_1} \rho(P)yzdC - \int_{C_2} \rho(P)yzdC = 0$$

C_1 e C_2 due domini simmetrici con $C_2 = \{(x,y,z):(x,y,-z)\in C_1\}$ e $C_1 \cap C_2 = \emptyset$
(Analogamente per E).

L'equazione dell'ellissoide (7.19) diventa quindi

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Fxy = \lambda^2 \qquad (7.23)$$

Da cui risulta che **il piano z=0, oltre ad essere piano di simmetria materiale, è anche piano principale** d'inerzia in quanto piano di **simmetria geometrica** dell'ellissoide d'inerzia **rispetto all'asse z** ad esso ortogonale. Infatti i punti **P(x,y,z) e P'(x,y,-z),** appartenenti alla superficie geometrica dell'ellissoide, simmetrici rispetto all'asse z, soddisfano l'equazione (7.23)**.**
Ciò non sarebbe vero se D o E fossero diversi da zero.

L'asse z è dunque asse principale d'inerzia rispetto ad O (asse di simmetria geometrica dell'ellissoide e asse principale centrale se O coincide con il baricentro P_0); gli altri due assi principali (centrali) **si trovano sul piano xy** e ad almeno uno di essi dovrà corrispondere il **momento minimo o massimo (A o B)** per la (7.22).

Per determinare la coppia di assi principali del piano xy ci faremo guidare proprio da quest'ultima considerazione e cioè ricercheremo tra tutte le rette del piano passanti per O quella a cui corrisponde un momento minimo (o massimo).

Dall'espressione generale (7.17) che fornisce il momento d'inerzia rispetto ad una retta del piano z=0, di coseni direttori α,β ($\gamma = 0$), si ha:

$$I_u = A\alpha^2 + B\beta^2 - 2F\alpha\beta \qquad (7.24)$$

Sia φ l'angolo tale che $\alpha = \cos\varphi$ e $\beta = \cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = \text{sen}\varphi$ siano i coseni direttori di tale retta rispetto agli assi x e y , il momento d'inerzia del sistema materiale rispetto ad essa, sarà:

$$I_u(\varphi) = A\cos^2\varphi + B\text{sen}^2\varphi - 2F\text{sen}\varphi\cos\varphi \qquad (7.25)$$

e quindi per determinare il valore dell'angolo φ affinché I_u sia **minimo o massimo** occorre che la sua derivata rispetto a φ si annulli (Teorema di Fermat dall'Analisi I):

$$I_u'(\varphi) = (B-A)\text{sen}2\varphi - 2F\cos 2\varphi = 0 \qquad (7.25)\text{bis}$$

Questa equazione fornisce dunque l'angolo di cui bisogna ruotare gli assi x e y per farli coincidere con gli assi principali d'inerzia x' e y' e di conseguenza la terna O x' y' z sarà principale d'inerzia.

Possibili soluzioni della (7.25) :

a) Se F=0 la terna Oxyz è già principale di inerzia, **cioè φ=0,** in quanto essendo già nulli D ed E, tutti i prodotti d'inerzia sono **nulli. Se**, in particolare risulta A = B l'ellissoide d'inerzia è di **rotazione** intorno all'asse z e, conseguentemente, i momenti d'inerzia rispetto alle coppie di rette ortogonali fra loro nel piano z=0 e passanti per O sono tutti uguali fra loro.

b) Se $F \neq 0$ e A = B si ha $\varphi = \frac{\pi}{4}$

c) Se $F \neq 0$ e $A \neq B$ si ha $\text{tg}2\varphi = \frac{2F}{B-A}$ (7.26)

Nota che quanto detto vale per qualunque piano di simmetria.

Notiamo che nel caso di un **Sistema Materiale Piano**, il più usato in queste dispense, il piano che contiene i punti materiali è già piano **principale d'inerzia**. Infatti, se ad esempio rispetto ad una fissata terna Oxyz di assi cartesiani, il piano z=0 contiene il sistema materiale allora, essendo, $z_i = 0$ risulta

$$D = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i = 0 \qquad E = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i = 0$$

e valgono le (7.23) , (7.24) e (7.25) .
Si può dire che tale piano è **un caso limite di piano** di **simmetria** e valgono tutte le considerazioni appena fatte, in particolare, **se risulta F=0** la terna Oxyz è già principale di inerzia.

Ciò accade certamente se il sistema piano ammette uno o due assi di simmetria materiale che andranno scelti come assi di riferimento. In caso contrario possiamo calcolare i momenti principali d'inerzia mediante la (7.25) con φ dato dalla (7.26), cioè:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= A\cos^2\varphi + B\,\mathrm{sen}^2\varphi - 2F\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi \ , \\ B_0 &= A\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) + B\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) - 2F\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \\ \varphi &= \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2F}{B-A} \end{aligned}\right\} \qquad (7.27)$$

E infine

$$C_0 = A_0 + B_0$$

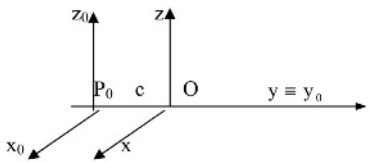
in quanto, per un sistema materiale piano risulta

$$A = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 \ , \qquad B = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 \qquad \text{e quindi} \qquad C = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) \equiv A + B \qquad (7.28)$$

Si noti che partendo da un sistema di assi ***principali centrali d'inerzia****,* $P_0x_0y_0z_0$*, il sistema di riferimento* Oxyz*, che abbia gli assi paralleli agli assi* x_0, y_0, z_0*, ottenuto traslando* P_0 *nel punto* O*, lungo uno degli assi principali centrali, è ancora un sistema di assi principali.*
Infatti:

Esempio 7.12 Traslazione Sistema Assi Principali d'Inerzia

Sia O(0,c,0) il traslato di P_0 lungo l'asse y_0. Per il prodotto, D, d'inerzia rispetto agli assi x,y,z risulta:



$$D = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_{0_i} - c) z_{0_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_{0_i} z_{0_i}) - c \sum_{i=1}^{n} m_i z_{0_i} =$$
$$= D_0 (=0) \ - \ cMz_0 (=0) = 0$$

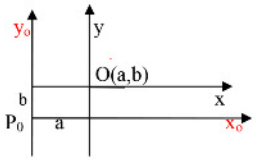
Essendo D_0 nullo perché la terna $P_0x_0y_0z_0$ è principale d'inerzia e l'ultimo termine corrisponde alla coordinata z_0=0 del centro di massa.
Infine $E = E_0 = 0$ e $F = F_0 = 0$.

Per quanto riguarda i momenti d'inerzia ricordiamo che si ha, applicando Huygens,

$$A=A_0+Mc^2\,,\quad B=B_0\,,\quad C=C_0+Mc^2 \qquad (7.29)$$

Ciò non si realizza se invece ci riferiamo ad un sistema Oxyz con gli assi paralleli a quelli della terna principale centrale d'inerzia $P_0x_0y_0z_0$ ma **centrato in un punto O(a,b,c) qualsiasi.**

Consideriamo, ad esempio, per semplicità, un sistema piano (per cui già sappiamo che D=E=O), e sia $P_0x_0y_0$ una terna principale centrale d'inerzia e O(a,b), risulta**:**



$$F=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_{0_i}-a)(y_{0_i}-b)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_{0_i}y_{0_i})-a\sum_{i=1}^{n} m_i\,y_{0_i}-b\sum_{i=1}^{n} m_i x_{0_i}+ab\sum_{i=1}^{n} m_i=$$

$$= \quad F_0\,(=0) \;-\; 0 \;-\; 0 \;+\; Mab\neq 0$$

E quindi, essendo $F\neq 0$, la terna Oxyz non è principale d'inerzia.

Conseguenza: se partiamo da una terna $P_0x_0y_0z_0$ che **non** è principale d'inerzia per cui F_0 diverso da zero , si ha la seguente legge di variazione**:** $\mathbf{F = F_0 + Mab}$ (a = distanza di P_0 dall'asse y e b = distanza di P_0 dall'asse x) che rappresenta il corrispettivo per i prodotti d'inerzia della legge di trasporto di Huygens per i momenti d'inerzia (analogamente per D ed E).

Riepilogo

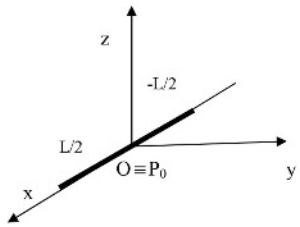
Se il corpo ha un piano di simmetria materiale π passante per O è asse principale d'inerzia la retta che passa per O perpendicolare al piano. Gli altri due assi vanno cercati nel piano.

Se il corpo è una figura piana, ogni retta perpendicolare al piano è asse principale d'inerzia rispetto al punto O in cui la retta interseca il piano. E se ammette un'asse di simmetria esso è principale e centrale d'inerzia. Se ne ammette due, allora essi formano la coppia di assi principali e centrali di inerzia.

Se il corpo ha due piani di simmetria materiale (fra loro ortogonali), per ogni punto della retta d'intersezione dei due piani la terna principale d'inerzia è costituita dalla retta e dalle due normali.

Esempio 7.13 Calcolo dei Momenti d'inerzia di un'asta omogenea

Come nell'Esempio 7.7 scegliamo l'asse x secondo la direzione dell'asta di lunghezza L ma consideriamo ora il riferimento Oxyz con l'origine coincidente con il baricentro P_0 dell'asta. Essendo il sistema nel piano z=0 risulta D=E=0 ed essendo l'asse y asse di simmetria risulta anche F=0. Quindi la terna P_0 xyz è una terna principale centrale d'inerzia. Poiché tutti i punti del sistema materiale asta sono distribuiti sull'asse x risulta che il momento d'inerzia rispetto all'asse x è nullo, A=0. Dalle (7.28) si ha $B_0 = C_0$ e cioè il momento d'inerzia rispetto all'asse y è uguale a quello rispetto all'asse z.



Risulta:

$$B_0 = C_0 = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \rho \frac{1}{3}\left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right) = \rho \frac{L^3}{12} = M\frac{L^2}{12} \quad \text{essendo } M = \rho L$$

Quindi l'equazione dell'ellissoide d'inerzia è

$$B_0 y^2 + C_0 z^2 = \lambda^2 \quad \text{cioè} \quad 1/12\, M\, L^2 (y^2 + z^2) = \lambda^2$$

Che in corrispondenza di ogni fissato valore del parametro di scala λ rappresenta un *cilindro(indefinito) rotondo avente per asse di rotazione l'asse x.*

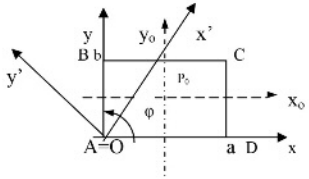
Questa superficie è una **Quadrica Rigata** ottenuta dalla rotazione di una retta **r** intorno ad una retta **r'**, detta asse di rotazione, ad essa parallela.

Nota che questo è il caso escluso fino ad ora in cui tutti punti materiali appartengono ad una retta e dunque la superficie geometrica descritta dai punti definiti dalla (7.23) non è chiusa come l'ellissoide ma ha punti all'infinito.

In generale si può affermare che se tutti punti materiali appartengono ad una retta, l'ellissoide d'inerzia relativo ad un suo punto O degenera in un cilindro rotondo avente tale retta come asse di rotazione.
Nel nostro esempio tale asse è l'asse delle x.
Un corpo si dice a struttura giroscopica rispetto ad un punto O quando il suo ellissoide d'inerzia di centro O è un ellissoide di rivoluzione.

Esempio 7.14 Momenti d'inerzia di un Rettangolo omogeneo e terna Principale d'Inerzia

Consideriamo un rettangolo ABCD omogeneo di **base a e altezza b** e un riferimento Oxyz con origine nel vertice A e l'asse x secondo la direzione della base e l'asse y secondo quella del lato AB e l'asse z come sempre perpendicolare al piano del foglio.



$$dm = \rho\, dC = \rho\, dxdy\,; \quad M = \rho \int_0^a \int_0^b dxdy = \rho\, ab \qquad \rho \text{ densità costante}$$

Calcoliamo i momenti utilizzando le (7.13)bis e osservando che i domini nell'integrazione doppia sono rettangolari:

$$\left.\begin{aligned} A &= \int_0^a \int_0^b \rho y^2 dxdy = \rho\, a \frac{1}{3} b^3 = M \frac{1}{3} b^2 \\ B &= \int_0^a \int_0^b \rho x^2 dxdy = M \frac{1}{3} a^2\,; \quad C = A + B = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2) \\ F &= \int_0^a \int_0^b \rho xy dxdy = \rho \int_0^a x dx \int_o^b y dy = \frac{\rho a^2 b^2}{4} = \frac{M}{4} ab \end{aligned}\right\} \qquad (7.30)$$

L'angolo φ di cui bisogna ruotare l'asse x per farlo coincidere con l'asse **principale** x'(l'asse y di $\varphi + \frac{\pi}{2}$) è dato dalla (7.26) :

$$\varphi = \frac{1}{2} \text{arctg} \frac{2F}{B - A} = \frac{1}{2} \text{arctg}[\frac{3}{2} \frac{ab}{a^2 - b^2}] \quad , a \neq b$$

Notiamo che la terna Ox'y'z così ottenuta è principale d'inerzia (ma non centrale) e dunque i momenti principali d'inerzia possono essere calcolati mediante le (7.27) .

Il baricentro $P_0\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$ è nel punto di incontro dei due assi di simmetria x_0 e y_0, come in figura, che saranno dunque assi principali e centrali d'inerzia.

Verifichiamo che la terna $P_0x_0y_0z$ è principale centrale d'inerzia .

Dobbiamo dimostrare che F=0. Infatti:

$$F=\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\rho xy\,dx\,dy=\rho\int_{-a/2}^{a/2}x\,dx\int_{-b/2}^{b/2}y\,dy=\frac{\rho}{4}\left[\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\right]\left[\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}\right]=0$$

Notiamo che abbiamo modificato gli estremi di integrazione in accordo con la nuova terna di riferimento $P_0x_0y_0z$ che risulta dunque essere principale e centrale d'inerzia.

Calcoliamo i momenti A_0 e B_0 e C_0, principali e centrali, rispetto a questi nuovi assi.
Dal Teorema di Huygens applicato alle rette parallele x e x_0 baricentrale, y e y_0 baricentrale, sappiamo che deve risultare :

$$A=A_0+M\left(\frac{b}{2}\right)^2 \text{ e } B=B_0+M\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Da cui si ottiene:

$$A_0=M\frac{1}{3}b^2-M\frac{b^2}{4}=\frac{1}{12}Mb^2,\quad B_0=\frac{1}{12}Ma^2,\quad C_0=A_0+B_0=\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

Nota che potevamo calcolare A_0 usando l'integrale :

$$A_0=\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\rho y^2\,dx\,dy=\rho a\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-b/2}^{b/2}=\rho a\frac{1}{3}\left[\frac{b^3}{8}+\frac{b^3}{8}\right]=\frac{1}{12}Mb^2 \qquad (7.31)$$

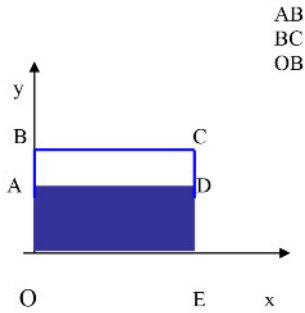
E analogamente per B_0

L'equazione della famiglia di ellissoidi d'inerzia relativi a P_0 sarà:

$$\frac{1}{12}Mb^2x^2+\frac{1}{12}Ma^2y^2+\frac{1}{12}M(a^2+b^2)z^2=\lambda^2$$

Esempio 7.15 Momenti e prodotti d'inerzia di una lamina composta da un rettangolo e tre aste

Consideriamo il sistema materiale costituito dal rettangolo omogeneo OADE e dalle aste AB, BC, CD disposte come in figura.



Per il calcolo dei momenti e dei prodotti d'inerzia rispetto agli assi x e y, come in figura, occorre calcolare il contributo del rettangolo pieno e dei lati AB, BC e CD il cui spessore non è trascurabile e la cui **densità lineare costante supponiamo sia uguale al valore costante della densità superficiale del rettangolo OADE.**

Contributo del rettangolo:

I punti del rettangolo OADE sono i punti P(x,y) con $x \in [0,4]$ e $y \in [0,2]$, $dm = \rho dxdy$, $M = 8\rho$ e con la distanza d(P) dall'asse x uguale alla coordinata y e d(P) dall'asse y uguale alla coordinata x e quindi, come calcolato nell'Esempio 7.14, si ha

$$A_{rp} = \rho \int_0^2 \int_0^4 y^2 dxdy = \frac{1}{3}\rho 8 \cdot 4 = \frac{4}{3}M \quad , \quad B_{rp} = \rho \int_0^2 \int_0^4 x^2 dxdy = \frac{1}{3}\rho 64 \cdot 2 = \frac{16}{3}M$$

$$F_{rp} = \rho \int_0^2 \int_0^4 xy\, dxdy = \frac{1}{4}\rho 4 \cdot 16 = 2M$$

Contributo dei lati AB, BC, CD:

I punti di AB sono i punti P(0,y) con $y \in [2,3]$, $dm = \rho dy$ è la massa elementare e $M = \rho$ è la massa totale dell'asta, quindi, come calcolato nell'esempio 7.13, si ha

$$A_{AB} = \rho \int_2^3 y^2 dy = \frac{1}{3}\rho(27-8) = \frac{19}{3}M \quad \text{e} \quad B_{AB} = 0\,, \quad F_{AB} = 0$$

Per il lato CD si ha P(4,y) con $y \in [2,3]$ $dm = \rho dy$, $M = \rho$

$$A_{CD} = \rho \int_2^3 y^2 dy = \frac{1}{3}\rho(27-8) = \frac{19}{3}M \quad B_{CD} = \rho\int_2^3 16\, dy = \rho 16 \cdot (3-2) = 16M$$

$$F_{CD} = \rho\int_2^3 4y\, dy = \rho 4 \cdot \frac{1}{2}(9-4) = \rho 4 \cdot \frac{5}{2} = 10M$$

Per il lato BC si ha P(x, 3), $x \in [0,4]$, d(P) dall'asse x è costante e pari a 3, $dm = \rho dx$, $M = 4\rho$ e quindi

$$A_{BC} = \rho \int_0^4 9dx = \rho 9 \cdot 4 = 9M\,,$$

Invece d(P) dall'asse y è pari a x e quindi

$$B_{BC} = \rho\int_0^4 x^2\, dx = \rho\frac{1}{3}4^3 = \rho\frac{64}{3} = \frac{16}{3}M\,, \quad F_{BC} = \rho\int_0^4 3x\, dx = \rho 3 \cdot \frac{1}{2}4^2 = 24\rho = 6M$$

Quindi per l'intero sistema si ha:

$$A = A_{rp} + A_{AB} + A_{CD} + A_{BC} = 23M$$

$$B = B_{rp} + B_{AB} + B_{CD} + B_{BC} = \frac{80}{3}M$$

$$F = F_{rp} + F_{AB} + F_{CD} + F_{BC} = 18M$$

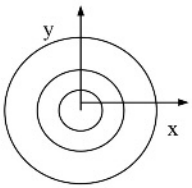
$$C = A + B = \frac{149}{3}M$$

Dalla (7.26) ricaviamo

$$\varphi = \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{2F}{B-A} = \frac{1}{2}\text{arctg}[\frac{3\cdot 2\cdot 18}{11}] = 42{,}09°$$

angolo di cui ruotare l'asse delle x per ottenere la terna principale d'inerzia centrata in O.

Esempio 7.16 Terna principale centrale e momenti principali d'inerzia di un disco omogeneo di raggio R



Per questo sistema esistono **infinite terne principali centrali** d'inerzia: ogni coppia di rette lungo la direzione degli assi di simmetria ortogonali del disco, diametri, (per cui F=0) con origine nel centro di massa e asse z ortogonale al piano del disegno.

Per semplificare il calcolo possiamo prendere come area elementare l'area della corona circolare dC di spessore dr : $dC = 2\pi r\, dr$, $dm = \rho\, dC$, $M = \rho\, \pi R^2$

Usiamo poi le coordinate polari , scelta naturale quando si è in presenza si simmetrie circolari:
$x = r\cos\vartheta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\vartheta$, $r \in [0,R]$, $\vartheta \in [0,2\pi)$

Per la simmetria circolare risulta $A_0 = B_0$ e quindi , essendo $C_0 = A_0 + B_0$, risulta $A_0 = B_0 = \frac{1}{2} C_0$

Quindi ci siamo ricondotti ad un integrale in una sola variabile:

$$C_0 = \rho \iint_{disco} (x^2 + y^2)dC = \rho 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2} \quad \Rightarrow A=B=\frac{1}{4}MR^2$$

Anche il disco omogeneo è un corpo a struttura giroscopica rispetto al baricentro.

Verifichiamo ora che per un disco omogeneo il prodotto d'inerzia F è nullo rispetto alla coppia di assi cartesiani, con origine nel centro di massa, scelti lungo i due diametri ortogonali, assi di simmetria materiale, come nella figura.

$$F = \rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R r\cos\vartheta r\,\mathrm{sen}\vartheta r dr = \rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R r\cos\vartheta r\,\mathrm{sen}\vartheta r dr = \rho[\frac{1}{2}\mathrm{sen}^2\vartheta]_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr = 0$$

8. MATRICE D'INERZIA

La relazione che esprime la legge di variazione del momento d'inerzia al variare della retta in una stella di centro O è una forma quadratica reale definita positiva, se si esclude il caso che tutti i punti materiali siano su una retta. La matrice reale e simmetrica ad essa associata si chiama Matrice d'Inerzia (o anche Omografia d'Inerzia o anche Tensore d'inerzia). La ricerca delle direzioni degli assi principali d'inerzia e dei corrispondenti momenti principali d'inerzia si riconduce così ad un problema agli autovalori di questa matrice.

8.1 Diagonalizzazione della Matrice d'Inerzia. Soluzioni del Polinomio Caratteristico

Consideriamo un sistema di punti materiali (P_i, m_i), i=1,…n, e una retta orientata r, passante per il punto O, con versore $\mathbf{u}$ le cui componenti sono i coseni direttori α, β e γ rispetto ad un sistema di riferimento prefissato Oxyz. Nel paragrafo 7.7 abbiamo definito il momento d'inerzia I_u del sistema rispetto alla retta r mediante la seguente forma quadratica definita positiva, avendo escluso il caso che tutti i punti si trovino su una stessa retta:

Alla forma quadratica è possibile associare la seguente matrice I_0

$$I_u = \sum_{i=1}^{n} m_i \left|\mathbf{u} \wedge (P_i - O)\right|^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\alpha\gamma - 2F\alpha\beta \qquad (8.1)$$

con $I_u > 0$ $\quad \forall \alpha, \beta, \gamma$ diversi da zero

Alla forma quadratica è possibile associare la seguente matrice I_0

$$I_0 = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \qquad (8.2)$$

Infatti, risulta

$$0 < I_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{I_0 u} = (\alpha\ \beta\ \gamma) \cdot \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad (8.3)$$

che è il prodotto scalare tra il vettore u e il suo trasformato $I_0 u$, tramite l'applicazione lineare I_0 da R^3 in R^3.
La matrice reale quadrata 3x3, simmetrica, reale, I_0, viene chiamata matrice d'inerzia (o anche tensore d'inerzia). Si estende anche a I_0 la definizione di *definita positiva*.

Come conseguenza del Teorema Spettrale dimostrato nei corsi di Geometria, essendo la matrice d'inerzia I_0 una matrice reale e simmetrica, essa risulta sempre diagonalizzabile, cioè esiste una base ortonormale di R^3 costituita da suoi autovettori e_i, i = 1,2,3, rispetto alla quale essa risulta diagonale.

Quindi risulta $\quad \mathbf{e_i} \cdot \mathbf{e_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \qquad i,j = 1,2,3$

e $\quad \mathbf{I_0 e_i} = \Lambda_i \mathbf{e_i}$, i = 1,2,3 $\qquad (8.4)$

con gli autovalori Λ_i soluzioni del *polinomio caratteristico* $\det(I_0 - \Lambda I) = 0$, avendo indicato con "det" il determinante ed essendo I la matrice identità

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i cui elementi sono} \quad i_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

con δ_{ij} *simbolo di Kronecker.*

Come visto prima nel paragrafo 7.6, alla forma quadratica definita positiva I_u della (8.1) si può associare un ellissoide, detto **ellissoide d'inerzia**, relativo al punto O (centro di simmetria) che costituisce un diagramma della variazione dei momenti d'inerzia al variare della retta in una stella di centro O e la cui equazione è :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2E\,xz - 2Fxy = \lambda^2 \qquad (8.5)$$

con λ costante dimensionale prefissata positiva.
Analogamente alla (8.3) , se P è il generico punto di coordinate (x,y,z) appartenente a tale superficie quadrica, allora l'equazione (8.5) è equivalente a :

$$(P\text{-}O) \cdot I_0 (P\text{-}O) = \lambda^2 \qquad (8.6)$$

con I_0 la matrice d'inerzia (8.2) definita positiva associata alla quadrica.

Per quanto detto sopra, se usiamo un nuovo sistema di riferimento in R^3 , sempre con origine in O ma individuato dalla base costituita dagli autovettori di I_0 (che esiste sicuramente grazie al Teorema Spettrale), rispetto a tale base la matrice si diagonalizza e possiamo scrivere

$$I_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 \end{pmatrix} \qquad (8.7)$$

Avendo denotato con A_0 , B_0 , C_0 le soluzioni del polinomio caratteristico $\det (I_0 - \Lambda I) = 0$.

La (8.5) assume dunque la forma canonica :

$$A_0 \xi^2 + B_0 \eta^2 + C_0 \zeta^2 = \lambda^2 \qquad (8.8)$$

con ξ, η, ζ le coordinate nel nuovo sistema di riferimento basato sugli autovettori .
Quindi, mancando la presenza dei prodotti d'inerzia in (8.8), le tre direzioni individuate dagli autovettori sono **gli assi principali d'inerzia** con origine il **punto prefissato O** (assi di simmetria geometrica dell'ellissoide), e i relativi autovalori (reali e positivi) rappresentano i momenti d'inerzia rispetto agli assi principali, cioè i cosiddetti "momenti principali d'inerzia".

Esempio 8.1 Calcolo dei momenti principali d'inerzia per la lamina dell'Esempio 7.15 mediante l'uso della matrice d'inerzia

Con i valori dei momenti e prodotti d'inerzia calcolati nell'Esempio 7.15 possiamo scrivere la matrice d'inerzia relativa alla lamina:

$$I_0 = \begin{pmatrix} 23M & -18M & 0 \\ -18M & \frac{80}{3}M & 0 \\ 0 & 0 & (23+\frac{80}{3})M \end{pmatrix}$$

Grazie ai risultati del paragrafo precedente sappiamo che i momenti principali d'inerzia sono gli autovalori di questa matrice e quindi le soluzioni del determinante seguente:

$$\begin{vmatrix} 23M-\Lambda & -18M & 0 \\ -18M & \frac{80}{3}M-\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & (23+\frac{80}{3})M-\Lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando questo determinante secondo l'ultima riga (metodo di LaPlace), si ottiene:

$$(\frac{149}{3}M-\Lambda)[(23M-\Lambda)(\frac{80}{3}M-\Lambda)-18^2M^2] = 0$$

$$(\frac{149}{3}-\Lambda)[3\Lambda^2-149\Lambda+868] = 0$$

E quindi le seguenti 3 soluzioni (valori approssimati alla terza cifra decimale):

$$\Lambda_1 = 49{,}666\,,\quad \Lambda_2 = 42{,}926\,,\quad \Lambda_3 = 6{,}74$$

Corrispondenti ai momenti principali d'inerzia

$$A_0 = 6{,}74\,M\,,\quad B_0 = 42{,}926\,M\,,\quad C_0 = 49{,}666M$$

rispetto agli assi ξ, η, ζ rispettivamente.

In accordo con le relazioni intercorrenti tra i semiassi dell'ellissoide in forma canonica :

$a>b>c \quad a = \frac{\lambda}{\sqrt{A_0}}, b = \frac{\lambda}{\sqrt{B_0}}, c = \frac{\lambda}{\sqrt{C_0}}$

A questi autovalori corrispondono le direzioni degli assi della terna principale d'inerzia date dai relativi autovettori. Se per esempio vogliamo determinare la direzione del versore $\mathbf{e}_1(e_{11}, e_{12}, e_{13})$ dell'asse ξ , corrispondente a $A_0 = 6,74$, dobbiamo usare la (8.4) e risolvere :

$$(I_0 - A_0 I)\mathbf{e}_1 = 0.$$

Cioè

$$M \begin{pmatrix} 23-6,74 & -18 & 0 \\ -18 & 26,666 - 6,74 & 0 \\ 0 & 0 & 49,666-6,74 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \end{pmatrix} = 0$$

E quindi risolvere il seguente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 16,26\, e_{11} - 18\, e_{12} &= 0 \\ -18\, e_{11} + 19,926\, e_{12} &= 0 \\ 42,926\, e_{13} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8.9)$$

Nota che ovviamente risulta $e_{13} = 0$ essendo il sistema piano e l'asse $z = \zeta$ e inoltre deve anche essere verificata la condizione.

$$e_{11}^2 + e_{12}^2 = 1 , \qquad (8.10)$$

con $e_{11} = \cos\varphi$ e $e_{12} = \cos(\pi/2 - \varphi) = \operatorname{sen}\varphi$, φ essendo l'angolo tra l'asse delle x e l'asse principale d'inerzia ξ cercato.

Dal sistema (8.9) risulta $e_{12} = 0,903\, e_{11}$ che, insieme alla condizione (8.10), fornisce $\varphi = 42,09°$ che rappresenta, quindi, l'angolo di cui ruotare l'asse delle x affinché la terna Oxyz diventi principale d'inerzia.

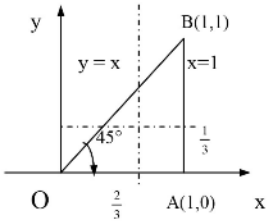
Il valore trovato è in accordo con il risultato ottenuto nell'Esempio 7.15 utilizzando la formula (7.26): $\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2F}{B-A} = 42,09°$.

Esempio 8.2 Matrice di inerzia per un triangolo omogeneo

Consideriamo il triangolo dell'Esempio 7.9 e calcoliamo i momenti d'inerzia relativi alla terna Oxyz della figura.

$dm = \rho dxdy$, $M=\frac{1}{2}$

$(\rho=1)$



Considerato il triangolo come dominio y-semplice e utilizzando le (7.13)bis si ha:

$$A = \int_0^1 [\int_0^x y^2 dy]dx \; ; \quad B = \int_0^1 [\int_0^x dy]x^2 dx$$

$$A = \frac{1}{3}\int_0^1 [y^3]_o^x dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{12} \quad B = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}[x^4]_o^1 = \frac{1}{4}$$

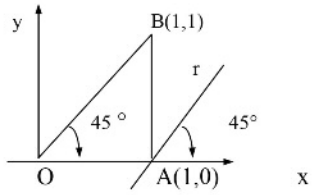
Essendo il sistema piano risulta $C = A + B = \frac{7}{12}$

$$F = \int_0^1 x[\int_0^x ydy]dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{8}$$

Quindi la matrice d'inerzia relativa ad O è data da:

$$I_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$$

Per determinare il momento di inerzia del triangolo rispetto alla retta r passante per il vertice A e parallela all'ipotenusa OB possiamo usare la (8.3) , $I_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_0 \mathbf{u}$, che fornisce il momento d'inerzia rispetto alla retta per O lungo la direzione del cateto OB e poi applicare il teorema di Huygens.



Il versore **u** comune alle 2 rette ha componenti $u_x = \cos 45$, $u_y = \text{sen} 45$, $u_z = 0$

Quindi

$$I_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_0 \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$I_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_0 \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{12}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{8}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{8}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{24}$$

Dal Teorema di Huygens si ha

$$I_r = \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_0 \mathbf{u} + Md^2$$

dove d è la distanza del vertice A(1,0) dalla retta per l'ipotenusa di equazione y-x=0.
Quindi

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$I_r = \frac{1}{24} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12} M$$

Esempio 8.3 Uso della matrice d'inerzia per il calcolo dell' Energia Cinetica di un sistema materiale rigido in un atto di moto rotatorio

Con riferimento alla formula fondamentale dei moti rigidi (4.27) nel caso di un atto di moto rotatorio, v(O) = 0 e O appartenente all'Asse di Istantanea Rotazione, per un **sistema di n punti materiali P_i di massa m_i** , si ha

$$\mathbf{v}(P_i) = \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O) \quad , \quad \boldsymbol{\omega}(\omega_1, \omega_2 , \omega_3)$$

E quindi l'energia cinetica T sarà:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v(P_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)]^2 \qquad (8.11)$$

Svolgendo i calcoli come nel paragrafo 7.6 per arrivare alla formula (7.17) del momento d'inerzia I_u , si ottiene

$$T = A\,\omega_1^2 + B\,\omega_2^2 + C\,\omega_3^2 - 2D\,\omega_2\,\omega_3 - 2E\,\omega_1\,\omega_3 - 2F\,\omega_1\,\omega_2 \qquad (8.12)$$

Riconosciamo in questa espressione una forma quadratica definita positiva nelle componenti della velocità angolare $\omega_1, \omega_2 , \omega_3$ a cui è associate la matrice d'inerzia I_o (vedi (8.2)) tale che

$$I_0 = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$

Quindi, similmente alla (8.3) , risulta

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_0 \boldsymbol{\omega} \qquad (8.13)$$

Nel caso particolare di un asse fisso di rotazione con versore **u** sarà $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{u}$ e quindi la (8.13) diventa

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_0 \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}[\mathbf{u} \cdot I_0 \mathbf{u}]\omega^2 = \frac{1}{2} I_u \omega^2$$

dove abbiamo usato la (8.3) e I_u è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione.

9. COMPLEMENTI DI GEOMETRIA DELLE MASSE: ELLISSE DI CULMANN, NOCCIOLO CENTRALE D'INERZIA

Nel caso di un sistema materiale piano, l'intersezione dell'ellissoide principale d'inerzia relativo ad un punto O con il piano del sistema fornisce una ellisse. In corrispondenza di un opportuno valore del parametro positivo λ, in termini dei giratori d'inerzia, si definisce una particolare ellisse detta Ellisse di Culmann. Se il punto O coincide con il Centro di Massa del sistema avremo l'Ellisse di Culmann Centrale che riveste un ruolo notevole in Scienza delle Costruzioni nella determinazione del Nocciolo Centrale d'Inerzia legato alla verifica di stabilità di una struttura. Ad esempio, un muro o un pilastro risultano in *buone condizioni di stabilità* se per ogni sezione orizzontale il cosiddetto *centro della sollecitazione si trova all'interno del nocciolo* .
Rimandando a testi specifici l'approfondimento di tale argomento, qui ci limiteremo, dopo aver determinato l'ellisse di Culmann, a richiamare nozioni di Geometria sull'antipolarità rispetto ad una ellisse reale che saranno fondamentali per la costruzione del nocciolo di alcune figure piane.

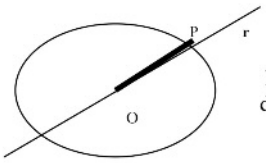
9.1 Ellisse di Culmann

Consideriamo un sistema materiale piano e sia z=0 tale piano. Sappiamo che, rispetto ad un punto O del piano, la perpendicolare in O a tale piano è asse principale d'inerzia. Se sezioniamo l'ellissoide d'inerzia relativa ad O con il piano z=0 otteniamo un ellisse nel piano xy:

$$Ax^2 + By^2 - 2Fxy = \lambda^2$$

Se gli assi x e y sono principali si avrà

$$A_0 x^2 + B_0 y^2 = \lambda^2 \qquad (9.1)$$



ricordiamo che dalla costruzione dell'ellissoide d'inerzia la misura del segmento intercettato sulla generica retta r della stella di centro O dell'ellissoide è tale che

$$PO = \frac{\lambda}{\sqrt{I_r}} \qquad I_r \text{ momento d'inerzia rispetto ad r}$$

$$A_0 x^2 + B_0 y^2 = \lambda^2 \qquad (9.1)$$

Ricordiamo inoltre, la Definizione I data all'inizio del paragrafo 7.6 del giratore, δ, rispetto ad una generica retta r

$$\delta = \sqrt{\frac{I_r}{M}} \Rightarrow I_r = M\delta^2,$$

risulterà, quindi, **rispetto agli x,y principali d'inerzia:**

$$A_0 = M\delta_x^2 \quad , B_0 = M\delta_y{}^2.$$

Posto $\lambda = \sqrt{M}\delta_x\delta_y$ e sostituendo in (9.1) si ha

$$\frac{x^2}{\delta_y^2} + \frac{y^2}{\delta_x^2} = 1 \quad \text{Ellisse di Culmann (equazione in forma canonica)} \qquad (9.2)$$

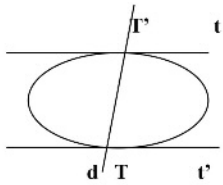
Se il punto O coincide con il Centro di Massa avremo l'Ellisse di Culmann Centrale.

9.2 Richiami sull' Antipolarità rispetto ad una ellisse reale

Sia data un'ellisse reale in forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

si definisce **antipolare** di un punto T dell'ellisse la retta **t** tangente all'ellisse nel punto T' **simmetrico** di T rispetto al centro O



e viceversa l'antipolo di una retta t tangente all'ellisse nel punto T' è il simmetrico T rispetto ad O di T'. I punti T e T' si dicono **coniugati nell'antipolarità.**

Il diametro d passante per T e T' si dice coniugato alla direzione della retta t.

Dalla definizione segue che l'antipolare di T passa per T' e l'antipolare di T' passa per T.
Più in generale vale il seguente **Teorema di Reciprocità**:
Se A e B sono due punti qualunque del piano dell'ellisse e se l'antipolare di A passa per B allora l'antipolare di B passa per A.

Ne consegue

a) Le rette di un fascio a centro proprio Q (al finito) hanno gli antipoli appartenenti ad una stessa retta che è l'antipolare di Q

b) Le rette appartenenti ad un fascio a centro improprio (all'infinito), e cioè fascio di rette parallele, hanno gli antipoli su una stessa retta che è il diametro coniugato alla direzione comune delle rette del fascio. Per individuare tale diametro è sufficiente , per la definizione di antipolare, tracciare le due rette del fascio che siano tangenti all'ellisse e congiungere i punti di tangenza.

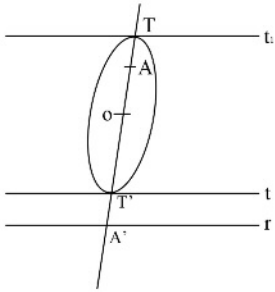
c) Per ogni coppia di punti coniugati P, P'appartenenti allo stesso diametro risulta **costante il prodotto** delle loro distanze dal centro dell'ellisse. Quindi se (A,A') e (B,B') sono due coppie di punti coniugati appartenenti allo stesso diametro risulta

$$|OA||OA'| = |OB||OB'| \quad \forall (A,A') \text{ e } (B,B') \in \text{ allo stesso diametro} \qquad (9.3)$$

DETERMINAZIONE DELL'ANTIPOLO DI UNA RETTA r NON DIAMETRALE

Poiché gli antipoli di un fascio di rette parallele si trovano sul diametro coniugato alla direzione comune è evidente che **l'antipolo A di una retta r del fascio si troverà su un diametro d coniugato alla direzione di r**.

a) Se indichiamo con A' il punto di intersezione della retta r del fascio con il diametro coniugato d allora **risulta che A e A' sono coniugati nell'antipolarità** in quanto A' per costruzione appartiene ad r che è l'antipolare di A e quindi, per il teorema di reciprocità , A deve appartenere all'antipolare di A'.



E quindi il punto A si trova sul diametro coniugato ad una distanza da O pari a

$$|OA| = \frac{|OT|^2}{|OA'|} \tag{9.4}$$

Tale relazione ci consente di individuare la posizione dell'antipolo di r.

9.3 Nocciolo Centrale d'Inerzia

Definizione: **Il nocciolo centrale d'inerzia è il luogo dei punti che sono gli antipoli rispetto all'ellisse centrale di Culmann delle rette tangenti esterne al contorno del sistema materiale considerato(cioè che non tagliano la figura che delimita il sistema materiale).**

Quindi data l'ellisse di Culmann

$$\frac{x^2}{\delta_y^2} + \frac{y^2}{\delta_x^2} = 1$$

dalla Geometria si dimostra che l'antipolare di un punto $P(x_P, y_P)$ rispetto ad essa, diverso dal centro di massa P_0, è la retta di equazione

$$\frac{xx_P}{\delta_y^2} + \frac{yy_P}{\delta_x^2} = -1 \tag{9.5}$$

e inversamente, alla generica retta r non passante per P_0 di equazione

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$$

è associato un punto P , detto antipolo, di coordinate

$$x_P = \delta_y^2 \frac{a_1}{a_3} \qquad y_P = \delta_x^2 \frac{a_2}{a_3} \tag{9.6}$$

E quindi se la retta r è tangente esternamente al bordo del sistema materiale considerato, queste relazioni ci forniranno la posizione di un punto del bordo del nocciolo.

NOTA: Si verifica facilmente che

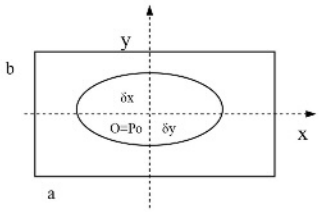
1) le rette esterne alla figura hanno gli antipoli interni al nocciolo;
2) le rette all'infinito hanno l'antipolo coincidente con il baricentro G;
3) individuato il nocciolo della figura e dato un punto P, è immediato stabilire se

la posizione dell'antipolare p di P, risulti esterna, tangente o secante alla figura a seconda che P sia interno, sul contorno o esterno al nocciolo;
4) il nocciolo è sempre una figura convessa.
5) se la figura ha dei lati rettilinei a essi corrispondono gli spigoli del nocciolo, mentre agli spigoli corrispondono i lati del nocciolo; in particolare se la figura è un poligono di n lati anche il nocciolo è un poligono di n lati e i vertici del nocciolo sono gli antipoli dei lati del poligono, viceversa i lati del nocciolo sono le antipolari dei vertici della figura;
6) se la figura non è convessa, ai fini del calcolo della frontiera del nocciolo, si deve renderla convessa (per evitare che le tangenti alla frontiera della figura la taglino).

Esempio 9.1 Nocciolo centrale d'inerzia per un rettangolo di lati a e b.

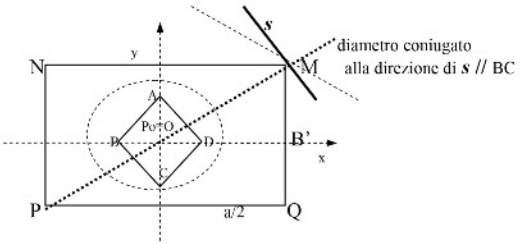
Si verifica facilmente che gli assi cartesiani in figura sono una coppia di assi principali centrali d'inerzia, essendo assi di simmetria materiale, e risulta

$$A_0 = \frac{1}{12}Mb^2 \ , \ B_0 = \frac{1}{12}Ma^2 \Rightarrow \delta_x = \sqrt{\frac{A_0}{M}} = \frac{b}{2\sqrt{3}} \ , \ \delta_y = \sqrt{\frac{B_0}{M}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$



L'equazione dell'ellisse centrale di Culmann è dunque

$$\frac{12x^2}{a^2} + \frac{12y^2}{b^2} = 1$$



Dalla figura risulta che il lato MQ giace sulla retta tangente al rettangolo e passante per i punti M e Q. Questa retta è coniugata al diametro dell'ellisse di Culmann coincidente con l'asse delle x e

quindi il suo antipolo B si trova su questo asse. Il suo coniugato B' è il punto di intersezione dell'asse x e del lato MQ e quindi si trova ad una distanza dal centro P_0 pari a $\frac{1}{2}a$.

Per la proprietà dei punti coniugati appartenenti allo stesso diametro, si ha:

$$|OB||OB'| = \delta_y^2 \Rightarrow |OB|\frac{1}{2}a = \frac{1}{12}a^2 \Rightarrow |OB| = \frac{1}{6}a$$

Controlliamo servendoci delle relazioni sulle coordinate (9.6) :

la retta tangente passante per i punti M e Q ha equazione $x - \frac{1}{2}a = 0$ e quindi il suo antipolo B ha coordinate $y_B = \delta_x^2 \frac{a_2}{a_3} = 0$ essendo $a_2 = 0$ e invece

$$x_B = \delta_y^2 \frac{a_1}{a_3} \quad \text{implica} \quad x_B = \frac{a^2}{12}(-\frac{2}{a}) = -\frac{1}{6}a$$

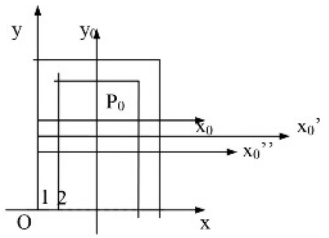
Ripetendo il ragionamento per gli altri 3 lati PQ, PN, NM si ottengono gli antipoli A, D, C rispettivamente , come da figura.

Il rombo ABCD è il nocciolo centrale d'inerzia: i lati del rombo sono costituiti dagli antipoli delle rette dei fasci di rette di centro i vertici del rombo ed esterne al rettangolo, cioè le tangenti esterne nei vertici del rettangolo. Infatti preso ad esempio il lato BC, essendo **B** l'antipolo della retta per i vertici M e Q e **C** l'antipolo di quella per M eN che si incontrano nel punto angoloso M, per il teorema di reciprocità, il punto M è l'antipolo della retta per BC e quindi ogni retta passante per M deve avere il suo antipolo sulla retta per BC.
In particolare la retta *s* per M e parallela a BC avrà PM come diametro coniugato e quindi il suo antipolo si troverà internamente a BC e analogamente per le altre tangenti esterne.
Si ripete il ragionamento per gli altri lati del rombo.

Ribadiamo che ai punti angolosi della figura del sistema materiale corrispondono tratti rettilinei del nocciolo d'inerzia . E quindi se il contorno della figura è una poligonale di n lati anche il nocciolo sarà un poligono di ugual numero di lati.
Se si considerano rette esterne al contorno i loro antipoli saranno interni al nocciolo , se si considerano rette che tagliano il contorno gli antipoli saranno esterni al nocciolo e se tagliano anche il nocciolo gli antipoli saranno esterni al contorno della figura.

Esempio 9.1 Calcolo dei momenti principali centrali d'inerzia e nocciolo d'inerzia di una figura forata.

Nell'Esempio 7.6 del paragrafo 7.4, la figura considerata è una figura forata ottenuta sottraendo al rettangolo esterno R_1 di altezza 7 cm e base 5cm il rettangolo interno R_2 di altezza 6cm e base 3cm.
Essendo l'asse y un asse di simmetria materiale esso è un asse principale d'inerzia e la retta ortogonale ad esso è anch'essa principale d'inerzia per ogni suo punto , in particolare per il Centro di Massa P_0 calcolato nel paragrafo 7.6.
Quindi la terna di assi $P_0x_0y_0z$ con origine nel Centro di Massa costituisce la terna principale centrale d'inerzia.



P_0 (2,5 , 4)

Essendo l'area totale (massa totale) A = Area del rettangolo R_1 – Area del rettangolo R_2 = 17 e y_{o1} =3,5 la coordinata y del baricentro del rettangolo R_1 , y_{o2} = 3 per R_2 , x_{o1} = 2,5 e x_{o2} = 2,5, le coordinate x dei baricentri dei due rettangoli.

Nella figura abbiamo indicato con x_0' l'asse passante per il baricentro di R_1 e con x_0'' quello passante per il baricentro di R_2 entrambi paralleli all'asse x_0

Calcolo dei momenti principali centrali d'inerzia A_o e B_o

Con $A_o = A_{oR_1} - A_{oR_2}$ e $B_o = B_{oR_1} - B_{oR_2}$

Dal Teorema di Huygens si ha:

$$A_{oR_1} = A_{xo'R_1} + M_1(y_o - y_{o1})^2 \text{ e } A_{oR_2} = A_{xo''R_2} + M_2(y_o - y_{o2})^2$$

Essendo x_0'un asse baricentrico per il rettangolo R_1 , di altezza h_1 =7 possiamo applicare la formula (7.31) con $(\rho = 1)$:

$$A_{xo'R_1} = M_1\frac{h_1^2}{12} = M_1\frac{7^2}{12} = 5\cdot 7\cdot\frac{49}{12} \cong 142{,}8$$

Avremo quindi $A_{oR_1} = 142{,}8 + 35(4-3{,}5)^2 = 151{,}55$

Analogamente, $A_{oR_2} = 18\cdot\frac{36}{12} + 18(4-3)^2 = 72$

Quindi $A_o = A_{oR_1} - A_{oR_2} = 79{,}55$

Per quanto riguarda B_o osserviamo che l'asse y_o è baricentrale per entrambi i rettangoli e quindi , sempre grazie alla (7.31), si verifica facilmente che

$B_{oR_1} = \frac{M_1 b_1^2}{12} = 35\cdot\frac{25}{12} = 72{,}8$ e $B_{oR_2} = \frac{M_2 b_2^2}{12} = 18\cdot\frac{9}{12} = 13{,}5$ sono i momenti di inerzia, rispettivamente, di R_1 con base b_1 = 5 e di R_2 con base b_2 = 3.

Quindi

$$B_o = B_{oR_1} - B_{oR_2} = 72{,}8 - 13{,}5 = 59{,}3$$

Siamo ora in grado di determinare i Giratori d'Inerzia:

$$\delta_{x_o} = \sqrt{\frac{A_o}{A}} = \sqrt{\frac{79{,}55}{17}} \cong \sqrt{4{,}67} \cong 2{,}16 \ ; \ \delta_{y_o} = \sqrt{\frac{B_o}{A}} = \sqrt{\frac{59{,}3}{17}} \cong \sqrt{3{,}48} \cong 1{,}86$$

E quindi l'ellisse di Culmann avrà equazione:

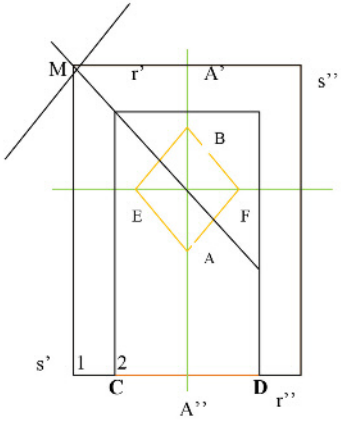
$$\frac{x^2}{\delta_{y_o}^2} + \frac{y^2}{\delta_{x_o}^2} = 1$$

Il calcolo dei vertici del nocciolo si ottiene infine dalle relazioni di antipolarità rispetto a questa ellisse delle rette tangenti alla figura **resa convessa aggiungendo il tratto CD.**

L'antipolo A della retta **tangente r'** si trova sul diametro coniugato, posto sull'asse y_o e passante per A' , coniugato di A, che dista dal centro P_o dell'ellisse:

$$|P_oA||P_oA'| = \delta_{x_o}^2 \ \text{ con } |P_oA'| = 7 - 4 = 3 \rightarrow |P_oA| = \frac{\delta_{x_o}^2}{3} = \frac{4{,}67}{3} = 1{,}55$$

ma da parte opposta a P_o e quindi si ha A(0, -1,55)



Analogamente l'antipolo B della retta **tangente r'' (parallela ad r')** e coniugato di A'', si trova sul diametro coniugato posto sull'asse y_o e passante per A'' , a una distanza da P_o

$$|PoB||PoA''| = \delta^2_{x_o} \quad \text{con} \; |P_oA''| = 4 \rightarrow |P_oB| = \frac{\delta^2_{x_o}}{4} = \frac{4{,}67}{4} = 1{,}16$$

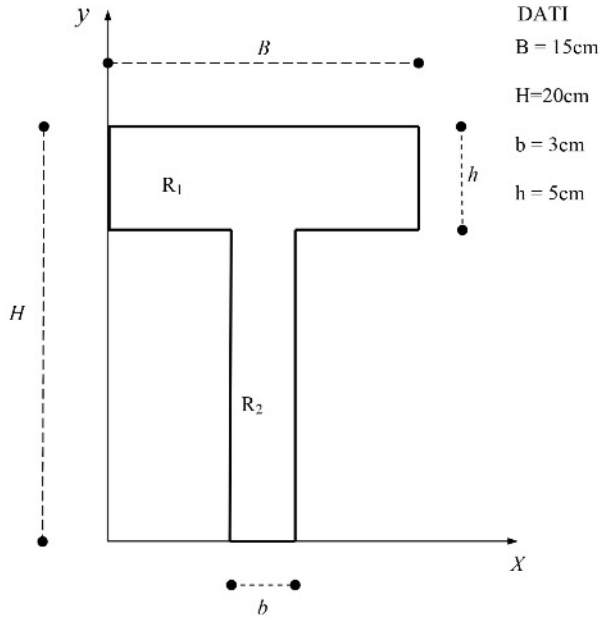
posto da parte opposta rispetto a P_o e quindi risulta B(0, 1,16)

Analogamente, per le **due tangenti verticali s' e s''**avremo gli antipoli E e F sul diametro coniugato passante per sull'asse x_o , posti simmetricamente da parti opposte rispetto a P_o

Il rombo è il nocciolo centrale d'inerzia, infatti**:**

a) gli antipoli delle rette dei fasci di rette di centro i vertici del rombo ed esterne al rettangolo, cioè le tangenti esterne nei vertici del rettangolo, devono appartenere ai lati del rombo. Infatti preso ad esempio il lato AC, essendo C l'antipolo di **s'** e A l'antipolo di **r'** , per il teorema di reciprocità, il punto M è l'antipolo della retta per AC e quindi ogni retta passante per M deve avere il suo antipolo sulla retta per AC. In particolare la retta per M e parallela a AC avrà il diametro coniugato che interseca AC e quindi il suo antipolo si troverà internamente a AC e analogamente per le altre tangenti esterne.
Si ripete il ragionamento per gli altri lati del rombo.

Esempio 9.2 Sezione a T



Calcoliamo il baricentro pensando la figura come composta dai due rettangoli: rettangolo R_1 superiore e R_2 inferiore.

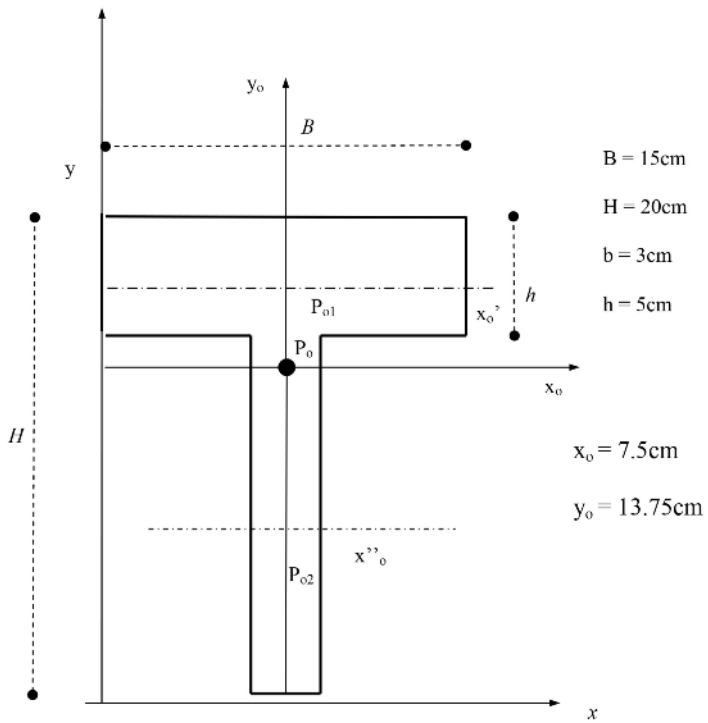
Coordinate dei baricentri parziali:

$$x_{o1} = 7{,}5 \quad y_{o1} = 17{,}5$$
$$x_{o2} = 7{,}5 \quad y_{o2} = 7{,}5$$

Essendo $M_1 = 75$ e $M_2 = 45$, si ha:

$$y_o = \frac{M_1 y_{o1} + M_2 y_{o2}}{M_1 + M_2} = \frac{75 \cdot 17{,}5 + 45 \cdot 7{,}5}{75 + 45} = 13{,}75$$

$x_o = 7{,}5$ avendo la figura un asse di simmetria verticale



Essendo l'asse y_0 di simmetria, la terna $P_o x_0 y_0 z$ è principale e centrale d'inerzia.

Calcoliamo i momenti principali e centrali d'inerzia.

$$A_o = A_{oR_1} + A_{oR_2} \quad \text{e} \quad B_o = B_{oR_1} + B_{oR_2}$$

Rispetto alla terna $P_o x_0 y_0 z$, dal Teorema di Huygens si ha:

A_{oR1} = momento d'inerzia del rettangolo superiore rispetto all'asse x'_o passante per il suo baricentro P_{o1} più la sua massa per la distanza di P_{o1} da P_o al quadrato, cioè

$$A_{oR_1} = A_{x'o'R_1} + M_1(y_{o1} - y_o)^2 = \frac{1}{12}15 \cdot 5^3 + 15 \cdot 5(17{,}5 - 13{,}75)^2 = 1210{,}94$$

e analogamente per il rettangolo inferiore

$$A_{oR_2} = \frac{1}{12}15 \cdot 5^3 + 15 \cdot 5(17{,}5 - 13{,}75)^2 = 2601{,}56$$

Quindi

$$A_0 = 1210.94 + 2601.56 = 3812.5$$

Per quanto riguarda B_{oR_1} del rettangolo superiore si ha

$$B_{oR_1} = \frac{5 \cdot 15^3}{12} = 1406{,}25$$

mentre per il rettangolo inferiore

$$B_{oR_2} = \frac{15 \cdot 3^3}{12} = 33{,}75$$

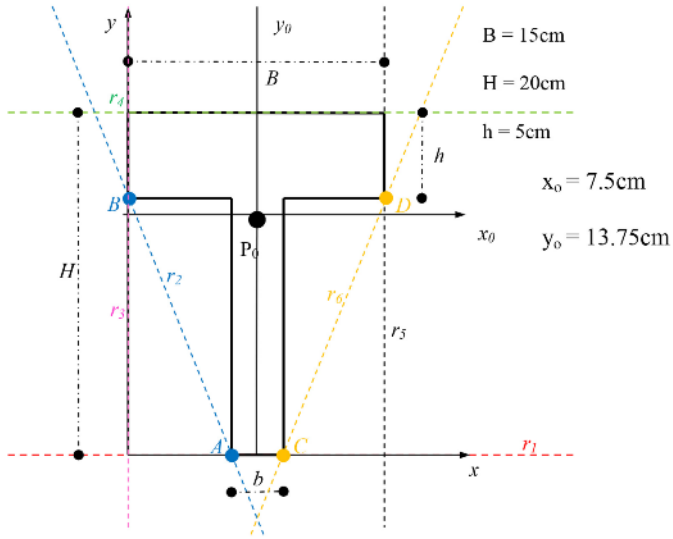
e quindi

$$B_0 = 1440$$

Avremo quindi per i giratori:

$$\delta_x = \sqrt{\frac{A_0}{M}} = \sqrt{\frac{3.812{,}5}{120}} = \sqrt{31{,}77} = 5{,}63 \qquad \delta_y = \sqrt{\frac{B_0}{M}} = \sqrt{\frac{1440}{120}} = \sqrt{12} = 3{,}46$$

Per il calcolo del nocciolo, rendiamo la figura **convessa aggiungendo i lati AB e CD**



le rette tangenti alla figura resa convessa hanno equazioni :

$r_1 : y + 13{,}75 = 0$

$r_2 : \dfrac{x - x_B}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_B}{y_B - y_A} \Rightarrow 0{,}14x + 0{,}06y + 1 = 0$

$r_3 : x + 7{,}5 = 0$

$r_4 : y - 6{,}25 = 0$

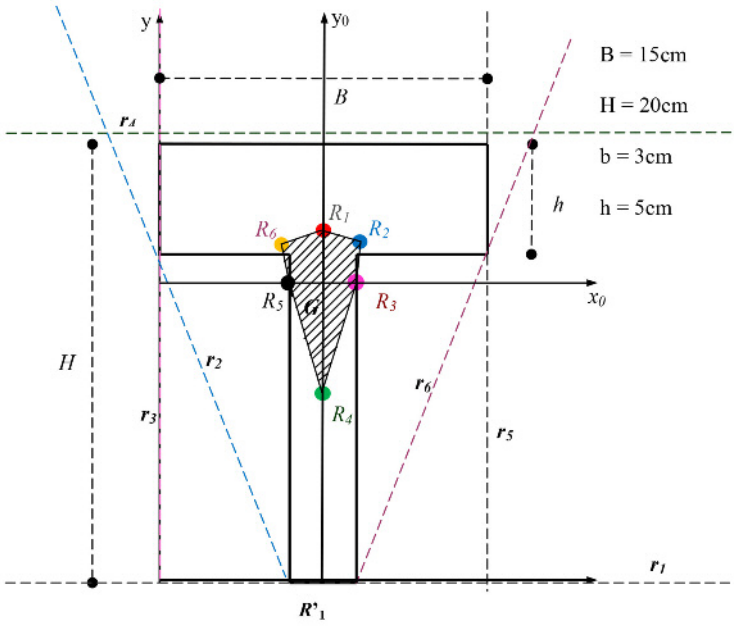
$r_5 : x - 7{,}5 = 0$

$r_6 : \dfrac{x - x_C}{x_C - x_D} = \dfrac{y - y_C}{y_C - y_D} \Rightarrow -0{,}14x + 0{,}06y + 1 = 0$

Per determinare l'antipolo R_1 della retta tangente r_1 è sufficiente usare la relazione tra punti coniugati nell'antipolarità :

$$|P_oR_1|\,|P_oR_1'| = \delta_x^2 \Rightarrow |P_oR_1|13.75 = 31.77 \Rightarrow |P_oR_1| = \frac{31.77}{13,75} = 2,31$$

Analogamente per R_4 : $|P_o\,R_4|$=5,08 ; per R_3 : $|P_o\,R_3|$=1,6 e il suo simmetrico R_5 :$|PoR_5|$=1,6



Invece per l'antipolo $\boldsymbol{R_2}$ si usano le (9.6) :

$$x_{R2} = \delta_y^2 \frac{a_1}{a_3} = 12\frac{0,14}{1} = 1,6$$

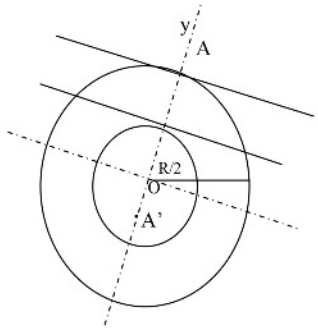
$$y_{R2} = \delta_x^2 \frac{a_2}{a_3} = 31,77 \cdot \frac{0,06}{1} = 1,9$$

e il suo simmetrico sarà R_6 (-1,6 , 1,9).

Esempio 9.3 Nocciolo di un disco omogeneo.

Come calcolato nell'Esempio 7.16 , i momenti principali centrali d'inerzia di un disco di raggio R sono dati da $A_0 = B_0 = \frac{1}{4} MR^2$ e quindi risulta $\delta_x = \sqrt{\frac{A_0}{M}} = \sqrt{\frac{B_0}{M}} = \frac{R}{2}$

L'ellisse degenera in un cerchio di raggio la metà del raggio del disco.



Per ogni scelta di una fra le infinite rette tangenti, una per ogni punto del bordo del disco, esiste un diametro coniugato alla direzione di tale retta tangente che è asse centrale d'inerzia (esistono infinite coppie di assi centrali d'inerzia per la completa simmetria circolare) e quindi la relazione tra punti coniugati sullo stesso diametro, vedi figura, fornisce

$$|OA||OA'| = \delta_x^2 \quad , \quad |OA'| = \frac{\delta_x^2}{R} = \frac{R^2}{4R} = \frac{R}{4}$$

Il nocciolo è pertanto ancora un disco ma di raggio R/4.

10. ESERCIZI DI PROVE INTERCORSO E DI ESAMI

In questo paragrafo vengono proposti testi di esercizi dati a prove intercorso e ad appelli di esame.

Esercizio 10.1

Sia S = [(P_1, v_1) , (P_2, v_2)] un sistema di vettori applicati paralleli con:

$P_1(5,-2)$ $\mathbf{v_1} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $P_2(3,0)$ $\mathbf{v_2} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

Ruotati i vettori di *S* di un angolo di $\pi/6$

i) determinare l'equazione dell'asse centrale *r*;
ii) determinare le coordinate del centro P_o usando la definizione;
iii) determinare un sistema *S'* equivalente a *S* motivando il risultato.

Esercizio 10.2

In un certo istante di tempo *t*, le posizioni dei punti A e B, nel piano Oxy, sono date da A(2,-1) e B(-1,0) e le velocità sono $\mathbf{v}(A) = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **e** $\mathbf{v}(B) = x\mathbf{i} + \mathbf{j}$

i) determinare il parametro x affinché l'atto di moto sia rigido;
ii) calcolare la velocità angolare ω e verificare che è un atto di moto rotatorio;
iii) determinare l'equazione dell'asse di istantanea rotazione e le coordinate del centro di istantanea rotazione C.
iv) Verificare il Teorema di Chasles.

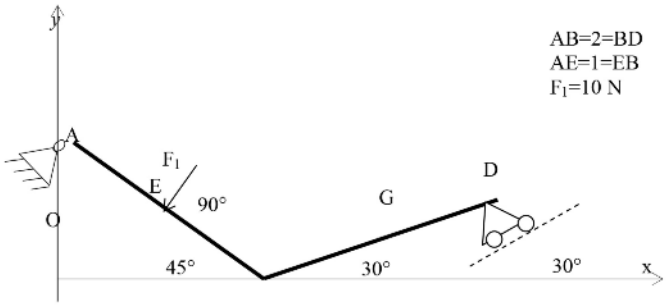
Esercizio 10.3

Sia S il sistema dei vettori applicati $(P_1 , \mathbf{v_1})$, $(P_2 , \mathbf{v_2})$ paralleli, con: $P_1(5,-2)$, $P_2(3,0)$, $\mathbf{v_1} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{v_2} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

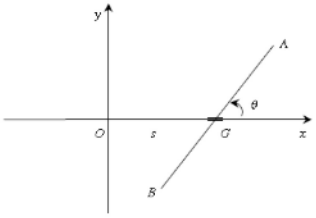
1) Determinare l'equazione dell'asse centrale *r*
2) Determinare le coordinate del centro P_0 usando la definizione;
3) terminare un sistema *S'* equivalente a *S* motivando il risultato

Esercizio 10.4

Verificare, mediante il calcolo matriciale applicato alle Equazioni Cardinali della Statica, che la trave in figura è una struttura isostatica e determinare le reazioni vincolari $\mathbf{R}_A$ e $\mathbf{R}_D$ risolvendo il sistema di equazioni.



Esercizio10.5



Una volta determinate le coordinate dei punti A e B dell'asta in figura, di lunghezza $2l$, il cui punto medio G scorre senza strisciare sull'asse delle x, determinare:

1) Il Centro di Istantanea Rotazione e le velocità di A e B

2) la velocità angolare ω dell'asta usando la formula fondamentale della cinematica rigida.

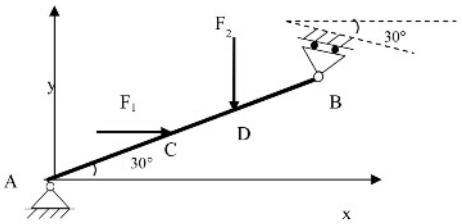
Esercizio 10.6

Due sistemi di vettori applicati Σ e Σ' hanno risultante $\mathbf{R} = \mathbf{R'} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e momento risultante $M(O) = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $M'(Q) = 4\mathbf{k}$ rispetto ai punti O(0, 0,0) e Q(1, 2, -1).
1) Verificare che Σ e Σ' sono equivalenti a $(T,\mathbf{R})$ con T(1, 0, -1)
2) Determinare l'equazione dell'asse centrale (comune perché Σ e Σ' sono equivalenti) e verificare che T appartiene a tale asse

Esercizio 10.7

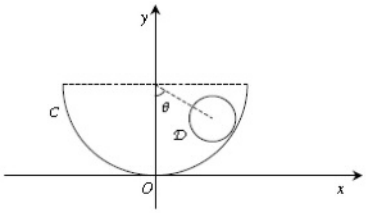
Verificare, mediante il calcolo matriciale applicato alle Equazioni Cardinali della Statica, che la trave in figura è una struttura isostatica e determinare le reazioni vincolari $\mathbf{R}_A$ e $\mathbf{R}_B$ risolvendo il sistema di equazioni.

AB= 2 m
AC= 1 m CD=0,5 m
F_1= 5 Kg
F_2= 3 Kg



Esercizio 10.8

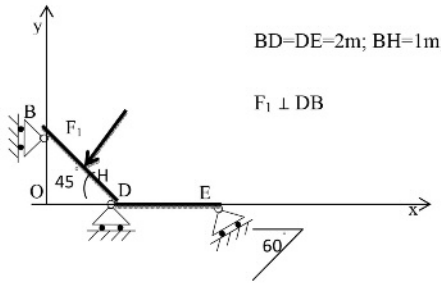
Un disco D di raggio *r* rotola senza strisciare all'interno di una guida semicircolare C di raggio *R*.
1) Determinare la posizione del Centro di Istantanea Rotazione del disco D e la velocità del centro P del disco D
2) Determinare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del disco D servendosi della formula fondamentale della cinematica rigida



Esercizio 10.9
Un sistema di vettori applicati ha risultante $\mathbf{R} = \mathbf{3i-j+2k}$ e momento risultante, rispetto al polo O(0,0,0) , $\mathbf{M}(O) = \mathbf{- 4i - 2j + k.}$
1) Calcolare il momento rispetto ad un punto dell'asse centrale.
2) Calcolare l'equazione di tale asse.

Esercizio 10.10

Verificare, mediante il calcolo matriciale applicato alle Equazioni Cardinali della Statica, che la trave in figura è una struttura isostatica e determinare le reazioni vincolari $\mathbf{R}_B$, $\mathbf{R}_D$ e $\mathbf{R}_E$ risolvendo il sistema di equazioni.

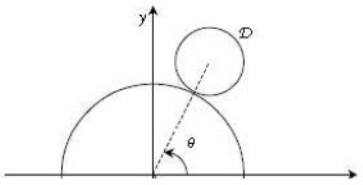


BD=DE=2m; BH=1m; F_1=10N

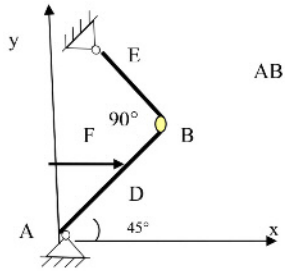
$F_1 \perp DB$

Esercizio 10.11

Un disco D di raggio *r* rotola senza strisciare all'esterno di una guida semi circolare di raggio *R*.
1) Individuare la posizione del Centro di Istantanea Rotazione del disco D e calcolare la velocità del centro P del disco D
2) determinare la velocità angolare ω del disco D servendosi della formula fondamentale della cinematica rigida.



Esercizio 10.12

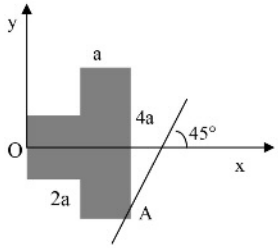


Nell'arco a 3 cerniere in figura si sostituisca alla cerniera in A un carrello a scorrimento orizzontale, rendendo così la struttura labile.

a) Determinare il Centro assoluto di istantanea rotazione per il moto dell'asta AB e verificare che è allineato con il centro del moto relativo delle due aste e con l'altro centro del moto assoluto dell'asta BE

b) Determinare la relazione tra gli angoli infinitesimi di rotazione intorno ai due centri di istantanea rotazione assoluti

Esercizio 10.13

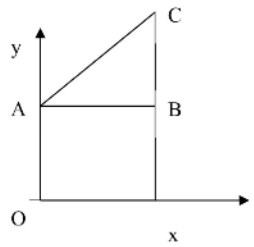


Per la figura composta da un quadrato di lato *2a* e da un rettangolo di base *a* e altezza *4a*, come in figura
a) Verificare, calcolando il prodotto d'inerzia F, che la terna Oxyz è principale d'inerzia.
b) Usando le proprietà di simmetria della figura, determinare le coordinate del Centro di Massa G.
c) Calcolare il momento d'inerzia della figura rispetto alla retta *r* passante per il vertica A e inclinata di 45° rispetto all'asse x.
d) Scrivere la Matrice d'inerzia I_o e verificare che gli autovettori coincidono con i versori della terna fissata.

Esercizio 10.14

Per il sistema materiale omogeneo composto da un quadrato e un triangolo rettangolo isoscele come in figura, si determini:

1) Il baricentro
2) La matrice d'inerzia relativa al punto O
3) Il momento d'inerzia relativo alla retta passante per i vertici A e C

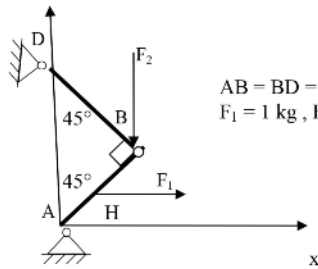


AB =BC = 1m

Esercizio 10.15

Per l'arco a tre cerniere in figura si determini;

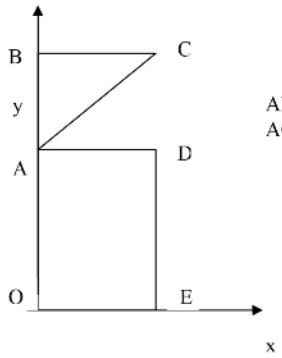
1) La reazione vincolare $\mathbf{R_A}$ e la reazione vincolare $\mathbf{R_B}$ utilizzando il Principio dei Lavori Virtuali



AB = BD = 1m
F_1 = 1 kg , F_2 = 1kg

Esercizio 10.16
Per il sistema materiale omogeneo composto da un rettangolo e un triangolo rettangolo isoscele come in figura, si determini:

1) Il baricentro
2) La matrice d'inerzia relativa **Io** relativa al punto O
3) I momenti principali d'inerzia mediante la diagonalizzazione della matrice $\mathbf{I}_O$ (6)

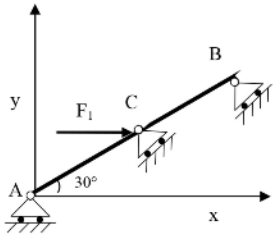


AB =BC = AD= OE =1m,
AO= DE = 2m

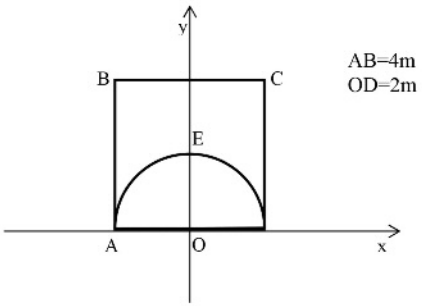
Esercizio 10.17

Per la trave AB in figura che forma un angolo di 30° con la direzione positiva dell'asse x, soggetta al carico $F_1 = 2kg$, con AC=CB=1m, e vincolata con tre carrelli di cui quello in A è a scorrimento orizzontale e quelli in C e B aventi direzione di scorrimento parallela all'asta, si chiede

a) determinare $\mathbf{R}_A$ e $\mathbf{R}_B$ mediante il Principio dei Lavori virtuali



Esercizio 10.18

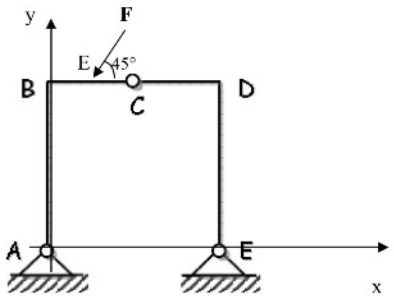


Data la figura forata (quadrato ABCD – semidisco AED),

1) Verificare, in base a proprietà di simmetria, che la terna $Oxyz$ è principale d'Inerzia.
2) Calcolare il Centro di Massa P_0 e i momenti principali e centrali d'inerzia usando il terema di Huygens.
3) Determinare il momento d'inerzia $I_r = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{I}_{P0} \boldsymbol{u}$ dove r è la retta per P_0 e parallela alla bisettrice del II e IV quadrante di versore $\mathbf{u}$ e $\boldsymbol{I}_{P0}$ è la matrice d'inerzia rispetto alla terna $P_0x_0y_0z_0$.

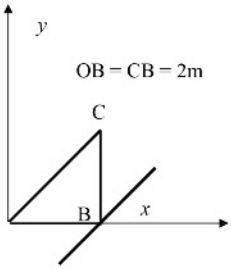
Esercizio 10.19

F = 3kg , AB = DE = BD = 2m,
BC=CD=1m, BE=EC=0,5m



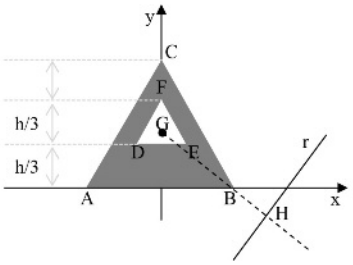
Per l'arco a 3 cerniere in figura, calcolare
1) Le reazioni vincolari $\mathbf{R_A}$ e $\mathbf{R_E}$ mediante l'uso delle equazioni cardinali della Statica
2) La reazione R_{Ax} mediante il Principio dei Lavori Virtuali.

Esercizio 10.20



Per il triangolo rettangolo isoscele come in figura
a) Usare la matrice d'inerzia I_O per calcolare il momento di inerzia del triangolo rispetto alla retta per O e C.
b) Determinare l'angolo di cui ruotare, intorno all'asse z, la terna Oxyz perché diventi principale di inerzia.
c) calcolare il momento di inerzia della retta r parallela alla retta per O e C e passante per il vertice B

Esercizio 10.21
Per la seguente figura forata , triangolo ABC – triangolo DEF,



AB=BC=CA (triangolo equilatero)

DE=EF=FD (triangolo equilatero)

$h_{ABC} = 3\ h_{DEF} = 3$ cm

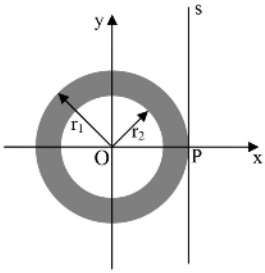
GH= 3 cm

determinare

1) Il centro di massa
1. I momenti d'inerzia rispetto agli assi principali d'inerzia
2. Il momento d'inerzia rispetto alla retta r, inclinata di 60°, a una distanza dal centro di massa di 3 cm.

Esercizio 10.22

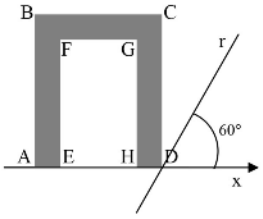
Per il settore circolare di raggi r_1= 3 m , r_2= 2 m come in figura, determinare



1. Il nocciolo d'inerzia
3. Il momento d'inerzia rispetto alla retta s, perpendicolare all'asse x e passante per il punto P con OP= 3 m

Esercizio 10.23

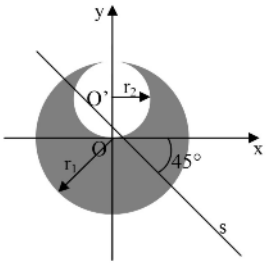
Per la figura forata composta dal rettangolo ABCD – il rettangolo EFGH, con AB= 6 m
BC= 5 m, EF= 5 mFG= 3 mAE= 1 m



DETERMINARE
1. Il nocciolo d'inerzia
2. Il momento d'inerzia rispetto ad una retta r, passante per D, inclinata di 60° rispetto all'asse x

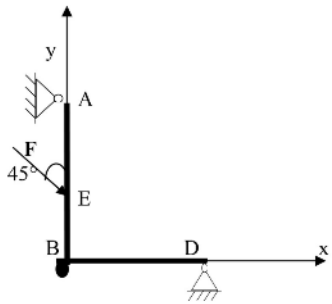
Esercizio 10.24

Per la figura forata costituita dal disco esterno di raggio r_1= 4 m – il disco interno di raggio r_2= 2 m disposti come in figura, determinare:



1. La coppia di assi centrali e principali d'inerzia
2. Il momento d'inerzia rispetto alla retta s, inclinata di 45° rispetto all'asse x e passante per il centro di massa del sistema

Esercizio 10.25



AE=EB= 1m , $|F|$ = 30kg
BD =2m

a) Per l'arco a 3 cerniere in figura determinare le reazioni vincolari in A, B e in D, mediante l'uso del Principio dei lavori virtuali
b) Verificare il risultato utilizzando le Equazioni Cardinali della Statica

BIBLIOGRAFIA

- G. Sestini, Lezioni di Meccanica Razionale, C.E. Giunti, Firenze, 1960

- C. Inglis, Applied Mechanics for Engineers, Dover Publ., New York, 1963

- M. Primicerio, Statica, Ed.CLUSF, Firenze, 1971

- T. Levi-Civita, U. Amaldi, Lezioni di Meccanica Razionale Vol. I e II, Zanichelli Editore, Bologna, 1974

- Fasano, V. DeRienzo, A. Messina, Corso di Meccanica Razionale, Laterza, Bari, 1978

- H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley Publ. Comp., 1980

-D. Quilghini, Appunti autorizzati dalle lezioni, Edizioni Centro Duplicazione Offset, Firenze, 1988

- G. Frosali, E. Minguzzi, Meccanica Razionale per l'Ingegneria, Società Editrice Esculapio, Bologna, 2011

Queste Dispense vogliono essere una introduzione allo studio di alcuni argomenti della Meccanica Razionale, sostanzialmente propedeutici alla Scienza delle Costruzioni e alla Meccanica Applicata, quali la Statica e la Cinematica dei Corpi Rigidi e la Geometria delle Masse. Esse si propongono di familiarizzare lo studente di Ingegneria con l'uso di modelli fisico matematici quali strumenti di studio di problemi reali. Utilizzato per un corso di soli 6 CFU, il testo è corredato da ampi richiami a nozioni di Analisi Matematica e Geometria oltre che da numerosi esercizi svolti utili per una corretta comprensione della teoria.

Giuliana Lauro laureata in Fisica con lode presso l'Università degli Studi di Napoli il 17 Marzo 1975. Vincitrice di una borsa di studio del C.N.R. per il Gruppo Nazionale di Fisica Matematica nel 1978. Ricercatore Universitario Confermato per il settore MAT/07 Fisica Matematica, presso l'Università degli Studi di Napoli, nel 1981. Negli anni 1984-86 Visiting presso il Department of Mathematics del Virginia Polytechnic Institute, Backsburg, Virginia, USA. Dal 1986 al 2002 svolge la sua attività di ricerca e di didattica, in corsi di Analisi Matematica e di Meccanica Razionale, presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Firenze. Nel 2002 risulta idonea alla valutazione comparativa a un posto di Professore Associato presso la Facoltà di Scienze MM.FF.NN. dell'Università degli Studi di Bari per il settore MAT/07 Fisica Matematica e nel 2005 viene chiamata dalla Facoltà di Architettura della Seconda Università degli Studi di Napoli dove insegna i corsi di Istituzioni di Matematiche e Matematica Generale, sia per la Laurea Triennale che per quella Magistrale in Architettura, il corso di Fondamenti di Matematica e Statistica per il Master di I Livello in Acustica e Controllo del Rumore e il corso di Modelli Matematici per la Valutazione del Benessere Ambientale per la Laurea Specialistica in Architettura-Nuove Qualità delle Costruzioni e dei Contesti. Negli anni 2011-2015, presso la ex-Facoltà di Ingegneria della Seconda Università degli Studi di Napoli, oggi Scuola Politecnica e delle Scienze di Base, insegna il Corso di Elementi di Meccanica per la Laurea Triennale in Ingegneria Aerospaziale-Meccanica e dal 2013 afferisce al Dipartimento di Ingegneria Industriale e dell'Informazione. È in pensione dal Settembre 2015. Nel corso degli anni, l'attività di ricerca, basata sulla costruzione di modelli matematici per le applicazioni, ha toccato diversi temi in ambito fisico matematico quali la Teoria del Trasporto di Boltzmann nei gas poco densi e le Equazioni Idrodinamiche in mezzi capillari bifasici caratterizzati da un opportuno tensore di Korteweg. Più recentemente, si è occupata di problemi di evoluzione, nell'ambito della Landscape Ecology, finalizzati allo studio dello sviluppo ecosostenibile di un territorio. Ha pubblicato circa 50 articoli su riviste e atti di convegni internazionali.

9 788897 840367